

**ALEX FIDALGO ZAMIKHOWSKY LOPES**

**APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO  
PARA A DEFINIÇÃO DA LOCALIZAÇÃO DE  
ESTAÇÕES RÁDIO-BASE**

São Paulo  
2022

**ALEX FIDALGO ZAMIKHOWSKY LOPES**

**APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO  
PARA A DEFINIÇÃO DA LOCALIZAÇÃO DE  
ESTAÇÕES RÁDIO-BASE**

Trabalho apresentado à Escola Politécnica  
da Universidade de São Paulo para obtenção  
do Título de Engenheiro de Produção.

São Paulo  
2022

**ALEX FIDALGO ZAMIKHOWSKY LOPES**

**APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO  
PARA A DEFINIÇÃO DA LOCALIZAÇÃO DE  
ESTAÇÕES RÁDIO-BASE**

Trabalho apresentado à Escola Politécnica  
da Universidade de São Paulo para obtenção  
do Título de Engenheiro de Produção.

Orientadora:

Prof<sup>a</sup>. Dra. Débora Pretti Ronconi

São Paulo  
2022

## RESUMO

O presente trabalho se propõe a selecionar pontos geográficos para a adição de estações rádio-base em uma rede móvel de uma operadora de telefonia celular, de modo a se atingir cobertura ótima, a partir de técnicas de Pesquisa Operacional. São delineados o cenário e a contextualização do problema que acomete as operadoras de telefonia móvel, se explicando a relevância do problema e, em seguida, se é analisada a bibliografia a respeito da classe de problemas relacionados. Se obtém um modelo de programação linear inteira mista, após se avaliar as peculiaridades do problema. Esse possui caráter *NP-complete* (tempo polinomial não-determinístico completo), o que favorece a abordagem via métodos heurísticos. São empregados dois algoritmos heurísticos de construção, que geram uma solução a partir da paulatina adição de componentes individuais até a obtenção de uma solução factível, e comparados com o método de enumeração completa, que gera a solução ótima; além disso se aplica uma das heurísticas em cenário de parametrização alternativa. São obtidos resultados com distintos tempos de execução e distância da solução ótima, evidenciando uma escolha entre estes que sempre deve ser ponderada no caso individual.

**Palavras-Chave** – Otimização, Redes Móveis, Localização, Pesquisa Operacional, Programação Linear Inteira Mista

## ABSTRACT

The present work aims at selecting geographical points to host radio base stations in an operator's mobile network in order to achieve optimal coverage levels, based on Operations Research. It outlines the context of this problem that concerns mobile operators, explaining its importance and, then, the related literature regarding this class of problems is studied. After evaluating the problem's peculiarities, a mixed-integer linear programming problem is obtained. It's a NP- complete (nondeterministic polynomial-time complete), which favors the approach via heuristic methods. Two construction heuristic algorithms are employed, which generate a solution from the gradual addition of individual components until a feasible one is obtained, and compared with the exhaustive search method, which generates the optimal solution; in addition, one of the heuristics is applied in an alternative parameterization scenario. Results with different execution times and optimality are obtained, demonstrating a choice between them that must always be considered in any instance of the problem.

**Keywords** – Optimization, Mobile Networks, Location, Operations Research, Mixed-Integer Linear Programming

# LISTA DE FIGURAS

1	Market Share das Operadoras no Brasil em Abril de 2022 . . . . .	14
2	Acessos de Telefonia Móvel no Brasil (em bilhões) . . . . .	16
3	Lotes do Leilão 5G . . . . .	19
4	Estações em uma Região Geográfica . . . . .	21
5	Cobertura de Conjuntos . . . . .	27
6	Tempo de Execução da Solução Exata por Enumeração (dias) . . . . .	34
7	Fluxograma do Algoritmo <i>Greedy Adding</i> . . . . .	35
8	Tempo de Execução do algoritmo <i>Greedy Adding</i> (milissegundos) . . . . .	36
9	Fluxograma do Algoritmo <i>Greedy Adding and Substitution</i> . . . . .	37
10	H3: Fragmentação da Superfície Terrestre em Hexágonos . . . . .	39
11	H3: Fragmentação da Superfície Terrestre em Hexágonos . . . . .	41
12	Hexágonos de Resolução 9 no Centro de São Paulo . . . . .	42
13	Cobertura de uma Estação Instalada no Centroide de um Polígono . . . . .	43
14	Visão de Satélite e Decomposição em Hexágonos de Piúma - ES . . . . .	52
15	Estações Rádio-Base em Piúma - ES . . . . .	53
16	Estações Selecionadas por Enumeração em Piúma - ES para $P = 2$ . . . . .	54
17	Estações Selecionadas por Enumeração em Piúma - ES para $P = 3$ . . . . .	54
18	Estações Selecionadas por Enumeração em Piúma - ES para $P = 9$ . . . . .	55
19	Visão de Satélite e Decomposição em Hexágonos de Salvador - BA . . . . .	57
20	Estações Rádio-Base em Salvador - BA . . . . .	58
21	Hexágonos Cobertos em Salvador - BA para $P = 150$ . . . . .	59
22	Hexágonos Cobertos em Salvador - BA para $P = 300$ . . . . .	60
23	Visão de Satélite e Decomposição em Hexágonos de Porto Alegre - RS . . . . .	62

24	Estações Rádio-Base em Porto Alegre - RS . . . . .	63
25	Hexágonos Cobertos Porto Alegre - RS para $H = 0,03$ . . . . .	64
26	Hexágonos Cobertos Porto Alegre - RS para $H = 0,04$ . . . . .	65
27	Hexágonos Cobertos Porto Alegre - RS para $H = 0$ . . . . .	66
28	Hexágonos Cobertos em São Paulo - SP para $P = 150$ - 1 <sup>a</sup> Fase . . . . .	70
29	Hexágonos Cobertos em São Paulo - SP para $P = 150$ - 2 <sup>a</sup> Fase . . . . .	71
30	Gráfico do Número de Estações x H por Cidade . . . . .	75
31	Gráfico da Cobertura x H por Cidade . . . . .	75

## **LISTA DE TABELAS**

1	Resolução H3 . . . . .	39
2	Tempos Total de Execução dos Algoritmos . . . . .	73
3	Cobertura das Soluções - Casos com Diferenças Superior a 0,01% . . . . .	73
4	Cobertura das Soluções Heurísticas - Casos com Diferenças Superior a 0,40% . . . . .	74
5	Cobertura e Número de Estações x H para São Paulo - SP . . . . .	77

## LISTA DE SÍMBOLOS

- A** : conjunto total de instalações disponíveis
- B** : conjunto dos números binários
- c** : vetor de custo associado
- D** : matriz de pertencimento entre elementos e subconjuntos disponíveis
- G** : matriz de distâncias entre as estações
- H** : parâmetro de acréscimo populacional
- h** : variável de demanda de um elemento
- I** : número total de hexágonos
- J** : conjunto total de estações disponíveis
- P** : parâmetro de limite superior do número de estações a serem escolhidas
- x** : vetor de seleção de subconjuntos
- Z** : vetor de seleção de subconjuntos
- $\gamma_j$  : população adicional trazida pela estação  $j$
- $\Gamma$  : população coberta pela estação inicial
- $\eta$  : distância calculada pela Fórmula de Haversine

# SUMÁRIO

<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 Mercado de Telefonia Móvel no Brasil</b>	<b>13</b>
1.1 Regulamentação e Fiscalização . . . . .	13
1.2 Concentração do Mercado . . . . .	13
1.2.1 Aquisições . . . . .	14
1.2.1.1 Nível Nacional . . . . .	14
1.2.1.2 Nível Regional . . . . .	15
1.3 Evolução do Mercado . . . . .	15
<b>2 Importância, Contexto e Definição do Problema</b>	<b>17</b>
2.1 Redes Móveis . . . . .	17
2.2 Padrão de Tecnologia Celular de 5 <sup>a</sup> Geração - 5G . . . . .	18
2.2.1 Necessidade de Maior Infraestrutura . . . . .	18
2.2.2 Leilão 5G . . . . .	19
2.3 Operadoras Ingressantes . . . . .	20
2.3.1 Importância do Ingresso Qualificado das Operadoras . . . . .	20
2.3.2 Cenário Enfrentado pelas Operadoras . . . . .	21
2.4 Alternativas de solução: <i>Anchor</i> vs <i>Collocation</i> . . . . .	21
2.5 Considerações sobre a Localização de Estações . . . . .	22
2.6 Interferência Eletromagnética . . . . .	22
2.7 Objetivo e Definição do Problema . . . . .	23
<b>3 Revisão Teórica</b>	<b>24</b>
3.1 Análise de Complexidade Temporal . . . . .	24

3.2	Métodos Heurísticos	25
3.3	Problema de Cobertura de Conjuntos	26
3.3.1	Apresentação	26
3.3.2	Modelagem	27
3.3.3	Exemplo de Modelagem	28
3.4	Problema da Cobertura Máxima	30
3.4.1	Apresentação	30
3.4.2	Modelagem	32
3.4.3	Complexidade da Solução Exata por Enumeração	33
3.4.4	Algoritmo <i>Greedy Adding</i>	34
3.4.5	Algoritmo <i>Greedy Adding and Substitution</i>	36
<b>4</b>	<b>Tratamento de Dados</b>	<b>38</b>
4.1	Metodologia H3	38
4.1.1	Razões para o Emprego do H3	40
4.1.1.1	Escolha de Hexágonos dentre os Polígonos Disponíveis	40
4.1.2	Escolha de Fragmentação Utilizada no Trabalho	41
4.2	Cálculo de População a Partir dos Hexágonos	42
4.3	Distância entre Estações	43
<b>5</b>	<b>Modelagem do Problema</b>	<b>45</b>
5.1	Cenário 1: Fixação do Número de Estações	45
5.2	Cenário 2: Acréscimo Populacional por Estação	46
<b>6</b>	<b>Resolução do Problema</b>	<b>49</b>
6.1	Solução Exata por Enumeração	49
6.1.1	Implementação do Algoritmo	50
6.1.2	Exemplo de Aplicação do Algoritmo	51

6.2 Algoritmo <i>Greedy Adding</i> . . . . .	55
6.2.1 Cenário 1 . . . . .	55
6.2.1.1 Implementação do Algoritmo . . . . .	55
6.2.1.2 Exemplo de Aplicação do Algoritmo . . . . .	57
6.2.2 Cenário 2 . . . . .	60
6.2.2.1 Implementação do Algoritmo . . . . .	60
6.2.2.2 Exemplo de Aplicação do Algoritmo . . . . .	62
6.3 Algoritmo <i>Greedy Adding and Substitution</i> . . . . .	66
6.3.1 Implementação do Algoritmo . . . . .	66
6.3.2 Exemplo de Aplicação do Algoritmo . . . . .	69
<b>7 Resultados</b>	<b>72</b>
7.1 1º Cenário . . . . .	72
7.1.1 Comparação entre os Três Algoritmos . . . . .	72
7.1.2 Comparação entre as Heurísticas . . . . .	73
7.2 2º Cenário . . . . .	75
<b>8 Conclusão</b>	<b>78</b>
<b>Referências</b>	<b>79</b>

# INTRODUÇÃO

A conectividade representa uma importante funcionalidade atualmente. Grande parte do trabalho, entretenimento, transporte e comunicação dos seres humanos se baseia no sistema global de redes de computadores interconectados conhecido como *Internet*. As redes móveis, em particular, são ferramentas de comunicação capazes de prover seus serviços independentemente da localização do usuário dentro dos limites de cobertura e que operam a partir da interação de aparelhos móveis com estações rádio-base.

Essa realidade implica que aquelas responsáveis pelo provimento de serviços de telefonia móvel, as operadoras móveis, precisam rotineiramente realizar decisões quanto à localização das suas estações. Essas decisões determinam que regiões se tornam cobertas por sinal, podendo portanto usufruir dos serviços de conectividade, e quais ficam carentes.

A temática de localização de estações ganha maior relevância com o crescente volume de tráfego de dados ao longo dos anos e, particularmente no momento atual, com o princípio das redes celulares de quinta geração - 5G -, as quais permitem um fluxo de dados muito maior, mas acompanhado por um menor alcance do sinal eletromagnético. Isso implica que mais estações devem ser construídas para que se possa usufruir dos benefícios desta tecnologia.

A chegada do 5G também é acompanhada pela proliferação de operadoras ingressantes no mercado de telefonia móvel, as quais se apresentam o desafio de cobrir regiões geográficas onde ainda não possuem qualquer infraestrutura. O caráter sensível da decisão a respeito das localizações é exacerbado pelo fato que essas operadoras tiveram que realizar grandes investimentos na compra de frequências leiloadas no leilão do 5G.

O presente trabalho busca otimizar o nível de cobertura da rede móvel de uma operadora de telefonia celular ingressante em uma determinada área, a partir da seleção de pontos geográficos para a escolha de estações rádio-base existentes (*Collocation*), como alternativa à inserção de novas estações (*Anchor*). De acordo com parâmetros de distância mínima entre duas estações (de modo a coibir interferências de sinal deletérias à rede) e custos associados à instalação de equipamento são propostos algoritmos para se obter melhor nível de cobertura.

O trabalho está estruturado em 8 capítulos. No Capítulo 1, é descrito um quadro sobre o status atual do mercado de telefonia móvel no Brasil, abordando os principais atores e aqueles responsáveis pela sua regulamentação e fiscalização, mostrando o caráter concentrado deste mercado, obtido em parte pelas sucessivas aquisições, e, por fim, traçando um quadro sobre o crescimento do volume de tráfego móvel no Brasil. No Capítulo 2, é dada uma contextualização do tópico de redes móveis juntamente com a importância de infraestrutura para o provimento de serviços para as operadoras (realçada pela ingresso da tecnologia 5G); além disso, é definido o objetivo do trabalho e problema a ser resolvido, bem como delineadas as suas peculiaridades. O Capítulo 3 traz o tratamento da literatura para os problemas mais intimamente conectados com o proposto pelo trabalho. O Capítulo 4 explica como os dados disponíveis são tratados para prover informação para os algoritmos utilizados no trabalho. O Capítulo 5 traz a modelagem matemática, com funções objetivo e restrições, do problema, cuja resolução é exposta no Capítulo 6 para cada algoritmo escolhido, via pseudocódigos e exemplos de aplicação. Por fim, o Capítulo 7 fornece os resultados expostos para várias cidades e parâmetros testados, bem como um avaliação comparativa entre o que foi obtido.

# 1 MERCADO DE TELEFONIA MÓVEL NO BRASIL

O mercado de telefonia móvel é o conjunto de instituições, procedimentos e infraestrutura no qual interagem a oferta e demanda por serviços de telefonia e internet móvel. Ele está inserido no setor de telecomunicações, responsável pelo provimento de serviços de comunicação a distância e que agrupa também outros serviços como de telefonia e internet fixa, rádio e televisão. As empresas responsáveis pela oferta de serviços de telefonia e internet móvel são chamadas *operadoras*.

## 1.1 Regulamentação e Fiscalização

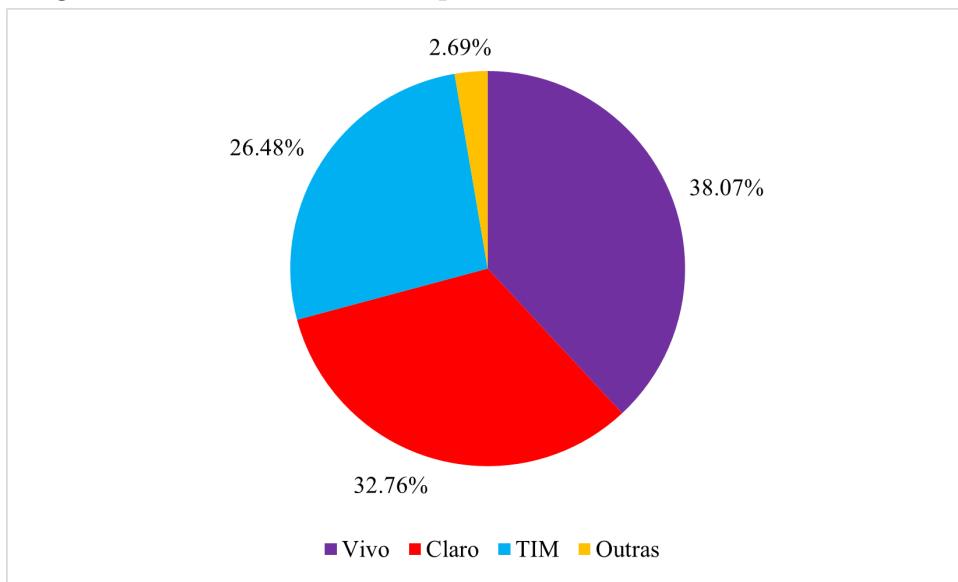
Em 1997, por meio da Lei nº 9472, foi criada Agência Nacional de Telecomunicações - Anatel-, autarquia responsável pela regulamentação de critérios e condições para a prestação de serviços de telecomunicações no Brasil. Cabe a ela a supervisão da prestação de serviços realizada pelas operadoras e a realização dos leilões de frequências, canais eletromagnéticos onde ocorre a transmissão de sinais de comunicação da telefonia e internet móvel.

Já a fiscalização de práticas anticoncorrenciais ou de abuso de poder econômico é responsabilidade de outra autarquia: o Conselho Administrativo de Defesa Econômica -CADE-, criado pela Lei 4.137/1962. Em 2021, o órgão aplicou R\$ 1.296.852.231,36 em multas (CADE, 2022).

## 1.2 Concentração do Mercado

Um conjunto de três empresas atualmente domina esse mercado, a nível nacional, no Brasil: Vivo, Claro e TIM. A Figura 1 mostra a segmentação do market share entre essas três operadoras, que juntas possuem participação de mais de 97%. A nível regional, o mercado é pulverizado, com mais de 20 mil provedores de internet móvel ou fixa (PAIVA, 2022).

Figura 1: Market Share das Operadoras no Brasil em Abril de 2022



Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados de TELECO, 2022

## 1.2.1 Aquisições

### 1.2.1.1 Nível Nacional

A nível nacional, este oligopólio se deu mediante sucessivas consolidações de mercado, sendo as mais recentes a incorporação da Nextel pela Claro e a partição da Oi entre os três oligopolistas. A aprovação desta última pelo CADE permitiu a partição da rede móvel da Oi entre Vivo, Claro e TIM<sup>1</sup>. Esse movimento está alinhado com uma tendência mundial de tripólios no mercado de telefonia móvel, caso também de Estados Unidos, China, Japão, Alemanha, Itália, Canadá, Espanha, Portugal, Holanda, Austrália, México, Colômbia, Argentina e Uruguai. Essa tendência é vista como resultado da necessidade de escala inerente ao mercado de telecomunicações, dado o grande CAPEX<sup>2</sup> envolvido<sup>3</sup>.

Estudo do Índice Brasileiro de Defesa do Consumidor (IDEC) expõe que consolidações como essa promovida pelo fatiamento da Oi podem fazer o consumidor pagar até 5 vezes mais em planos e pacotes de dados de internet e telefonia móvel. Seu estudo argumenta que além de menor concorrência levar a maiores preços, a Oi praticava preços expressivamente menores em relação aos seus concorrentes para um mesmo serviço prestado<sup>4</sup>. A votação

<sup>1</sup>Disponível em [Jornal Nacional](#). Acesso em 26/07/2022.

<sup>2</sup>*Capital Expenditure*: Termo para as despesas de capital realizadas pelas empresas, ou seja, aquele relacionado à aquisição, manutenção e melhoria dos seus ativos fixos (como equipamentos, terras e faixas de frequência do espectro eletromagnético).

<sup>3</sup>Disponível em [IstoÉ Dinheiro](#). Acesso em 08/08/2022.

<sup>4</sup>Disponível em [IDEC](#). Acesso em 08/08/2022.

no CADE para a aprovação da medida foi acirrada, com um empate que seria definido pelo voto do presidente do órgão; e com votos contrários realçando a barreira à entrada de novos concorrentes que a aprovação significaria.

### 1.2.1.2 Nível Regional

De acordo com PAIVA (2022), após uma contínua expansão pelo interior do Brasil, os provedores de internet passaram por um processo de consolidação, resultado da aproximação do limite de crescimento destes após levarem banda larga via rádio e fibra a cidades de pequeno e médio porte. Deste modo, se gera um cenário propício para a expansão via aquisições.

Conforme alega Jair Francisco, diretor de mercado da Unifique, "Investimentos são inevitáveis e urgentes, mas nem sempre o ISP<sup>5</sup> tem essa capacidade ou não está disposto a fazê-lo. É uma indústria de capital intensivo. Se não houver equilíbrio, o provedor terá problemas para sobreviver". Fato que se soma a razões de ordem tributária (como a superação do limite de faturamento anual para enquadramento no Simples), conforme expõe PAIVA (2022), e intensifica a busca pela venda.

Esse processo pode levar ao desamparo muitos consumidores. Conforme argumenta Rudinei Carlos Gerhart, que coordenou a participação no leilão de 5G do consórcio de provedores Iniciativa 5G Brasil, "Quando um pequeno provedor é absorvido por um grande, em média 30% da base é perdida, porque o comprador não consegue dar a atenção que o pequeno provedor dava".

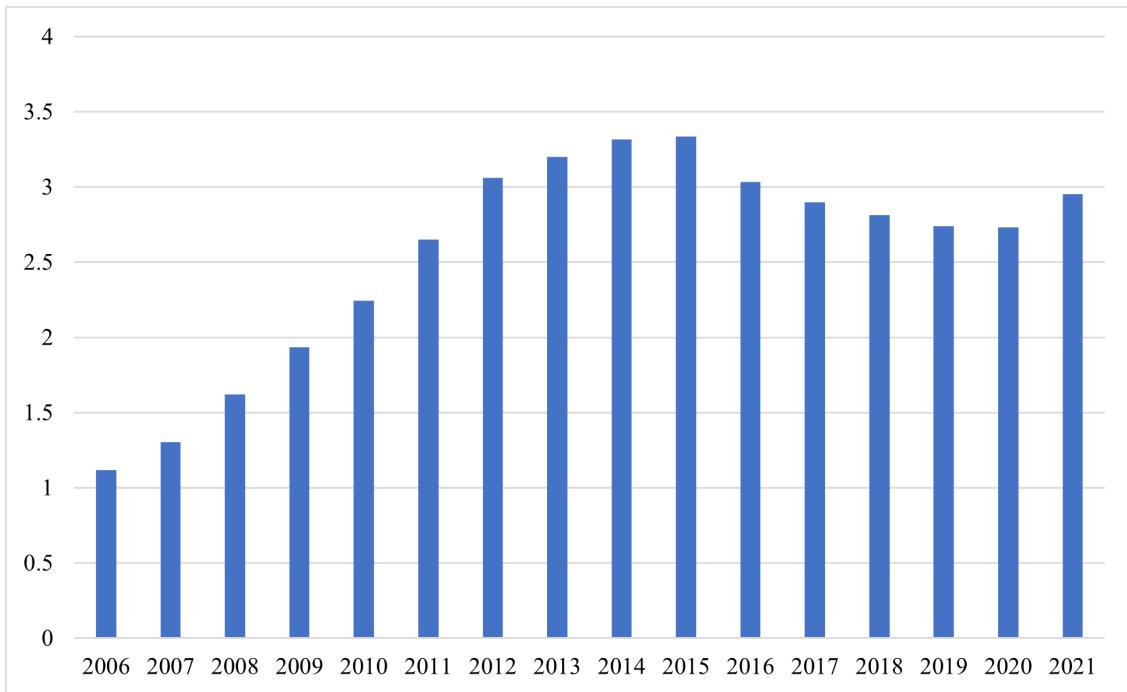
## 1.3 Evolução do Mercado

O número de acessos à rede de telefonia móvel é um importante indicador da relevância do uso dessa tecnologia na atividade humana. Percebe-se uma tendência de crescimento dos acessos, interrompida em um período de declínio da atividade econômica brasileira, mas que cresceu no último ano completo. O volume de acessos atualmente é cerca de 3 vezes o valor observado em 2006. Na Figura 2, pode ser observada a evolução dos acessos, por parte dos consumidores, de telefonia móvel no Brasil.

---

<sup>5</sup>Sigla para *Internet Service Provider*.

Figura 2: Acessos de Telefonia Móvel no Brasil (em bilhões)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados de ANATEL, 2022

## 2 IMPORTÂNCIA, CONTEXTO E DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Este capítulo busca compreender a importância, mostrar o contexto e definir a natureza e objetivo do problema enfrentado por operadoras de telefonia móvel e internet na seleção de locais para a instalação de estações rádio-base.

### 2.1 Redes Móveis

Uma rede de telefonia móvel é composta por um grande número de áreas geográficas chamadas 'células'. Dentro dessas células estão as estações rádio-base, que enviam e recebem sinais de rádio de e para telefones celulares localizados nessas células para permitir que seus usuários se conectem à internet e façam chamadas. Essas estações estão conectadas por meio de uma rede de transmissão ao núcleo da rede da operadora, que gerencia as conexões entre seus clientes e outros usuários móveis, bem como entre seus clientes e a Internet.

Uma estação rádio-base é tipicamente composta por diversos equipamentos, sendo os mais característicos as antenas (recebem e enviam sinais de rádio para os usuários), os rádios (realizam o processamento dos sinais) e as bandas-base (unidades de controle do sistema celular). Ela pode se apresentar na forma de *rooftop* (antenas instaladas no topo de edifícios), *green-field* (antenas instaladas sobre torres isoladas), *street-level* (antenas instaladas em alturas próximas ao nível da rua, como em postes de iluminação ou pontos de ônibus), *distributed antenna system* (utilizadas para a cobertura de áreas internas fechadas de estabelecimentos com tráfego considerável, como shoppings, hospitais e escritórios).

Os sinais são subconjuntos do espectro eletromagnético leiloados, no Brasil, pela Anatel para as operadoras de telefonia móvel, de modo que cada uma adquire o direito de trafegar sobre uma faixa de frequências adquirida. As frequências são tipicamente da ordem de megahertz e possuem maior alcance (distância que conseguem cobrir) quanto

menor o seu módulo.

As operadoras de telefonia móvel são responsáveis pelo provimento de serviços de internet para os consumidores em diferentes áreas geográficas, sendo a cobertura da operadora (o conjunto de áreas nas quais ela é capaz de prover seus serviços) um dos critérios de maior relevância na contratação do serviço. O cliente busca possuir conexão independentemente da sua trajetória ou localização e valorizará a operadora que melhor cumpra este objetivo.

## 2.2 Padrão de Tecnologia Celular de 5<sup>a</sup> Geração - 5G

A última geração tecnológica de redes móveis é conhecida como 5G e representa um avanço que abre espaço para uma melhor experiência do usuário em usos já conhecidos e também novas aplicações. Exemplos incluem cirurgias remotas, realidade aumentada e virtual, casas inteligentes, carros auto-dirigíveis, agricultura conectada e automação industrial.

### 2.2.1 Necessidade de Maior Infraestrutura

Por outro lado, a implantação dessa tecnologia apresenta desafios para operadoras e o poder público. Menciona-se que a quantidade de antenas e outros equipamentos de infraestrutura para a operação do 5G é entre 5 vezes (MIRAGAIA, 2021) e 10 vezes maior (SOARES, 2022) do que aquela para o 4G.

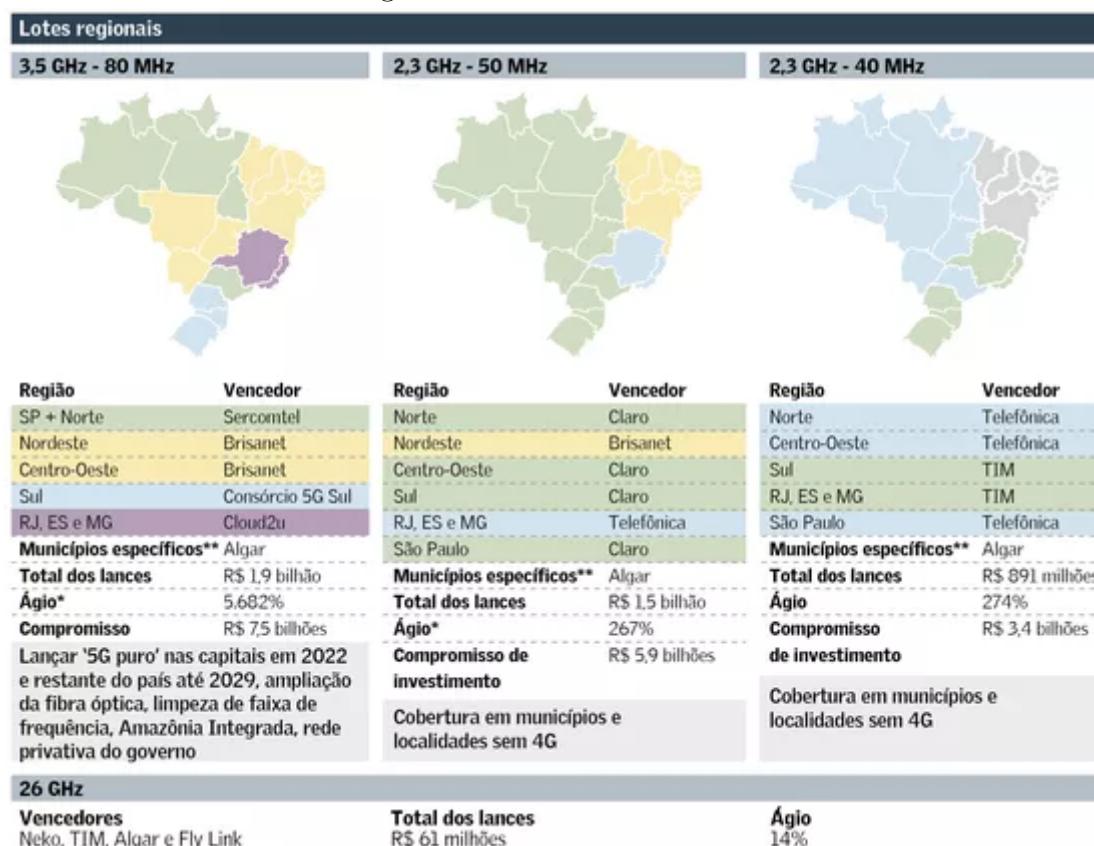
Os usos envolvendo alto *throughput* (taxa de envio de informação correta, usualmente exposta em bits por segundo - medida da velocidade da transmissão na rede móvel) requerem largas bandas de frequência para toda a informação poder trafegar rapidamente. Essas estão mais facilmente disponíveis no espectro das altas frequências, características do 5G, como as faixas de gigahertz. Essas frequências mais altas, no entanto, apresentam maior dificuldade de propagação, sendo mais sensíveis a presença de obstáculos. Isso implica que a cobertura é fortemente afetada, sendo pequenas as distâncias que as ondas eletromagnéticas empregadas pelas redes móveis podem percorrer; portanto, há uma necessidade de maior número de pontos de emissão e recepção de sinal.

## 2.2.2 Leilão 5G

O leilão brasileiro do 5G foi um empreendimento realizado em 2021 pela Anatel para a concessão do uso do espectro de frequências características da tecnologia de telefonia móvel de quinta geração para as operadoras. Ele movimentou quase R\$ 50 bilhões (SANTANA, 2021) e teve como um de seus resultados a entrada de cinco novas operadoras no mercado: Brisanet, Winity, Cloud2U, Consórcio 5G Sul e Neko Serviços; todas obtiveram lotes regionais, com exceção da Winity<sup>1</sup>.

A Figura 3 detalha a alocação para cada operadora de frequências por região. Como exemplo, a operadora Brisanet, tradicionalmente voltada para banda larga fixa, ingressou no mercado móvel, arrematando frequências nas regiões Nordeste e Centro-Oeste. Já o Consórcio 5G Sul, formado pela Unifique, operadora de Santa Catarina, e a União Copel, do Paraná<sup>2</sup>, adquiriu lotes contidos na faixa entre 3,5GHz e 80 MHz no Sul.

Figura 3: Lotes do Leilão 5G



Fonte: SANTANA, 2021

Muitas dessas operadoras ingressantes possuíam já uma infraestrutura de banda larga

<sup>1</sup>Disponível em [CNN](#). Acesso em 26/07/2022.

<sup>2</sup>Disponível em [GZH Economia](#). Acesso em 26/07/2022.

fixa já instalada, concentradas nas regiões onde fizeram suas ofertas no leilão; sendo inclusive atores importantes no mercado. A Uniflue, por exemplo, possuía, em setembro de 2021, 1,35 milhão de residências passadas com fibra de banda larga fixa e 424.736 residências conectadas, sendo o sexto player nessa modalidade de serviço no Brasil. Em Santa Catarina, é líder em banda larga de fibra, com 25,9% de market share, e número dois em banda larga fixa (o que inclui cabos coaxiais e de cobre), com 17,2% participação.

O regulamento do leilão impôs obrigatoriedades para as operadoras ganhadoras de faixas que prezavam pelo aumento da cobertura no país. Jair Franciso, diretor de mercado da Uniflue, declara que a empresa está em processo de conectar mais municípios nos próximos anos do que conectou em toda a sua história, uma vez que as obrigações para o bloco regional [região Sul do Brasil] envolvem a cobertura de 658 municípios com até 30.000 habitantes<sup>3</sup>.

## 2.3 Operadoras Ingressantes

### 2.3.1 Importância do Ingresso Qualificado das Operadoras

No Brasil, as operadoras prestam um serviço dotado de alta rejeição e insatisfação por parte dos consumidores. No ranking Reclame Aqui de piores empresas em termos de satisfação do cliente<sup>4</sup>, as duas campeãs são operadoras - Claro e Vivo. Já no ranking do Procon<sup>5</sup> as três piores - Claro, Vivo e TIM.

A concentração de mercado diminui a pressão para a entrega de um serviço de melhor qualidade. Além disso, fatores como infraestrutura deficiente (como falta de estações) - concentrada nas grandes cidades e mesmo nelas desprovida da amplitude necessária -, foco em aumento de conexões em vez de melhoria de conexões existentes (BBCBRASIL, 2013).

O leilão do 5G colaborou com uma expansão do número de operadoras de telefonia móvel, apesar de serem todas operadoras regionais. Portanto, apesar do tripólio brasileiro permanecer intacto, se abre uma janela de oportunidade para o crescimento e qualificação dessas operadoras ingressantes, criando as bases para uma potencial expansão de seus serviços a nível nacional<sup>6</sup>.

---

<sup>3</sup>Disponível em [Bnamericas](#). Acesso em 16/08/2022.

<sup>4</sup>Disponível em [Reclame Aqui](#). Acesso em 25/07/2022.

<sup>5</sup>Disponível em [Procon](#). Acesso em 25/07/2022.

<sup>6</sup>Cabe notar que essas operadoras ingressantes não necessariamente empregarão exclusivamente a tecnologia 5G.

### 2.3.2 Cenário Enfrentado pelas Operadoras

Operadoras ingressantes no mercado ou aquelas que buscam inserção em regiões que não operam se deparam com o problema de seleção de pontos para a instalação de estações rádio-base. O problema enfrenta restrições como a seleção de pontos aptos a sediarem uma estação, escolhas como o número de estações a serem instaladas e relativas aos equipamentos utilizados em cada estação.

A Figura 4 exemplifica uma região geográfica de interesse para uma operadora ingressante. A região é dotada de pontos correspondentes a estações rádio-base já operantes por operadoras concorrentes. Busca-se otimizar a cobertura da operadora naquela região, ou seja, otimizar o número de pessoas com acesso à rede de internet e telefonia móvel da operadora.

Figura 4: Estações em uma Região Geográfica



Fonte: Elaboração Própria

## 2.4 Alternativas de solução: *Anchor* vs *Collocation*

A operadora tem a opção de se instalar uma estação original, que será responsável pela transmissão e recepção de sinal dos seus clientes; a operadora arca com todo o custo de instalação e operação dessa estação. Essa alternativa é denominada *anchor*.

Frequentemente, uma solução menos arriscada para operadora buscando operar na região é utilizar a infraestrutura já construída por outra operadora, mediante o pagamento de um aluguel (para a própria operadora já instalada ou para a pessoa em posse

da estrutura) - processo denominado *collocation*. A operadora apenas instala seus equipamentos na estação e pode irradiar seu sinal a partir dela

A alternativa é a construção de estações próprias, o que acarreta a economia do aluguel pago em contrapartida aos custos de instalação completos da estação. Essa escolha é acompanhada da necessidade de compra de terrenos ou negociação para a instalação e operação de equipamentos de telecomunicação no local, além de necessidade de licenciamento juntamente com a Anatel.

Este trabalho focará na solução via *collocation*.

## 2.5 Considerações sobre a Localização de Estações

Conforme discutido, a tecnologia 5G expande significativamente o número de estações a serem empregadas pelas operadoras. Além disso, elas incorrem em altas saídas de caixa que precisam gerar retorno no longo prazo.

O investimento em frequências representa um alto aporte que expande o capital da empresa, mas não é a única grande saída que afetam as operadoras. Os equipamentos como rádio, banda-base e antena, obtidas dos fornecedores, representam grandes custos que tendem a crescer com o 5G. Além disso, toda a operação e otimização das redes móveis<sup>7</sup> envolve recursos consideráveis.

A correta decisão de escolha de locais para a instalação de estações define se a operadora logrará atender as demandas que lhe são postas, o que representa a continuidade da sua base consumidora, além da atração de novos clientes. Portanto, um esforço profundo deve se voltar para a avaliação de pontos geográficos potencialmente recipientes de estações, de modo que se chegue aos melhores locais para a transmissão e recepção de sinal.

## 2.6 Interferência Eletromagnética

Interferência eletromagnética pode ser definida como *"the effect of unwanted energy due to one or a combination of emissions, radiations, or inductions upon reception in"*

---

<sup>7</sup>Este esforço percorre todo o processo de criação e funcionamento de uma estação. Além da instalação e liberação para tráfego, há o contínuo monitoramento de parâmetros de rede para que a operadora possa melhorar a performance da sua rede, solucionar problemas (como falta de capacidade em uma região ou obstrução de sinal devido a um evento extremo) e entregar a melhor experiência ao cliente possível com os recursos envolvidos).

*a radiocommunication system, manifested by any performance degradation, misinterpretation, or loss of information which could be extracted in the absence of such unwanted energy*" (UNION'S, 2020). No contexto das telecomunicações, a interferência representa um fator de degradação da rede que piora a relação entre sinal e ruído, dificultando a integridade dos pacotes de dados trafegados pelas estações.

A interferência é mais pronunciada conforme menor a distância entre as duas fontes emissoras de sinal. Desse modo, deve-se impor uma distância mínima entre as estações escolhidas, agregando uma restrição adicional ao problema. De modo a se mitigar a interferência, a distância mínima imposta foi escolhida como aquela correspondente ao alcance determinado para o sinal (ou seja, o raio de cobertura da estação).

## 2.7 Objetivo e Definição do Problema

O problema consiste, portanto, em selecionar estações existentes ou propor novas estações de modo a maximizar o número de pessoas atendidas pelo sinal de rádio-frequência respeitando as restrições. Ou seja, escolher polígonos, cada um dotado de uma população, de modo a maximizar a soma das população dos polígonos selecionados.

As restrições impostas a essa busca permitem uma escolha que seja factível com os recursos limitados à disposição das operadoras e atendem a exigências técnicas da operação de redes móveis. A primeira delas é que não devem existir duas estação a uma distância menor que a distância mínima exigida entre duas estações (vista em detalhe na Seção 4.3), o que geraria interferências disruptivas entre os sinais das duas estações, piorando a qualidade geral da rede. As demais restrições são variáveis dependendo do cenário adotado e serão expostas no Capítulo 5.

### 3 REVISÃO TEÓRICA

Este capítulo se propõe a apresentar o conceito de Análise de Complexidade, justificar o uso de heurísticas, técnicas potencialmente poderosas para a resolução de problemas complexos, e realizar uma revisão teórica a respeito dos problemas atinentes àquele apresentado neste trabalho, de acordo com a literatura de Pesquisa Operacional. São abordadas as visões de obras de referência na área de Pesquisa Operacional e na indústria, bem como os principais métodos de resolução para estes problemas.

#### 3.1 Análise de Complexidade Temporal

A Teoria da Complexidade, segundo DASKIN (1995), permite a avaliação de algoritmos a partir de considerações sobre o tempo e a capacidade de armazenamento, de modo que o tempo de execução de um algoritmo se torna uma função do tamanho do problema. Neste trabalho, será estudada a complexidade temporal dos algoritmos, sendo descartadas considerações a respeito da complexidade espacial (relativas ao armazenamento, ou memória).

Um subconjunto importante dessa teoria é a divisão de problemas em classes:  $P$ ,  $NP$ ,  $NP-hard$  e  $NP-complete$ . Ainda conforme DASKIN (1995), os problemas da classe  $P$  são aqueles que podem ser resolvidos em tempo polinomial, enquanto os de classe  $NP$  são aqueles nos quais uma solução candidata pode ser validada como solução em tempo polinomial; isso implica que  $P \subseteq NP$ .

Uma alternativa aos tempos polinomiais são os exponenciais. SIPSER (2007) afirma estes surgem tipicamente ao se resolver problemas através de busca exaustiva em um espaço de soluções - busca pela força bruta<sup>1</sup>. Os algoritmos de tempo polinomial são suficientemente rápidos para muitos propósitos, mas os de tempo exponencial raramente são úteis.

---

<sup>1</sup>O algoritmo de Enumeração Completa visto mais adiante no capítulo é um exemplo desta categoria.

SIPSER (2007) explica que existem problemas *NP* cuja complexidade individual está relacionada àquela da classe inteira: se existe um algoritmo de tempo polinomial para quaisquer desses problemas, então todos os problemas desta classe seriam solúveis em tempo polinomial. Tais problemas são os da classe *NP-complete*. Por fim, um problema é *NP-hard* caso todos os problemas *NP* são redutíveis a ele em tempo polinomial, mesmo que ele próprio possa não estar contido na classe dos problemas *NP*.

## 3.2 Métodos Heurísticos

Os métodos heurísticos são ferramentas que se propõem a trazer soluções para problemas complexos de forma rápida e com resultados satisfatórios, ainda que sub-ótimos. Conforme trazem ZANAKIS; EVANS; VAZACOPOULOS (1989), em oposição à matemática avançada que é necessária para desenvolver resultados teóricos na área de otimização, o desenvolvimento da heurística é principalmente uma arte e um esforço criativo de resolução de problemas.

PEARL (1984) esclarece que os métodos heurísticos realizam um meio-termo entre a simplicidade do método e o desejo de se atingir bons resultados. Assim, eles se apresentam como regras práticas de fácil aplicação. Problemas complexos podem requerer a avaliação de um número muito grande de possibilidades para se determinar uma solução exata. As heurísticas indicam um caminho para se reduzir o número de avaliações e se obter soluções dentro de um tempo razoável.

Foi proposta uma ampla categorização das técnicas heurísticas por ZANAKIS; EVANS; VAZACOPOULOS (1989). Os algoritmos de *Construção* geram uma solução a partir da paulatina adição de componentes individuais até a obtenção de uma solução factível; um exemplo dessa classe são os Algoritmos Gulosos, que maximizam melhorias a cada passo e serão os empregados neste trabalho. Os de *Melhoria* partem de uma solução factível e atingem melhorias sucessivas através de uma sucessão de trocas ou fusões em uma busca local. Os de *Programação Matemática* partem de modelos de otimização matemática com um procedimento de obtenção de solução exata, e modificam a solução para se obter uma heurística eficiente. Os de *Partição* fracionam o problema em problemas menores a serem resolvidos independentemente; no final, as soluções aos subproblemas são fundidas em uma solução para o problema geral. Os de *Relaxação* promovem a expansão do espaço de solução para se obter um problema tratável e subsequentemente se volta à zona factível. Finalmente, os de *Inferência e Análise Estatística* se baseiam na investigação de propriedades estatísticas a partir da suposição de uma distribuição de probabilidade simples

dos dados de entrada ou na estimação do ponto ou intervalo ótimo, a partir de uma distribuição estatística das soluções heurísticas obtidas. Vale notar que técnicas específicas podem combinar abordagens de diferentes categorias.

Também se destaca o ambiente atual vantajoso que existe, para a aplicação de heurísticas: *While not provably optimal, heuristics offer approximate solutions that are hoped to be of high quality. Big data and real-time planning environments have meant that finding good solutions fast is of great practical value* (MURRAY, 2016, p.12).

### 3.3 Problema de Cobertura de Conjuntos

#### 3.3.1 Apresentação

Um grande problema da Pesquisa Operacional e relacionado ao apresentado neste trabalho é o Problema de Cobertura de Conjuntos. Seja um conjunto  $A$  dotado de  $n$  subconjuntos  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Uma cobertura de  $A$  é uma união de subconjuntos de  $A$  que equivale a  $A$ . Se  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , uma cobertura de  $A$  é, por exemplo,  $\{0\} \cup \{1, 2, 3\} \cup \{0, 3, 4, 5\}$ . Note que  $n$  representa o número de subconjuntos de  $A$  disponíveis e  $m$  é o número de elementos de  $A$ .

No caso da demanda de cobertura pelas operadoras, o conjunto  $A$  pode ser interpretado como o conjunto de todos os polígonos resultantes da subdivisão de uma região, enquanto cada  $A_j$  é o conjunto desses polígonos que são cobertos por uma estação instalada em um ponto da região.

Conforme indicam ARENALES et al. (2006), em geral há um custo ou valor associado a cada  $A_j$ ; que no caso seria a população atrelada a esse subconjunto, e o problema é selecionar uma coleção de subconjuntos que formem uma cobertura e minimizem o custo ou maximizem o benefício<sup>2</sup> associado

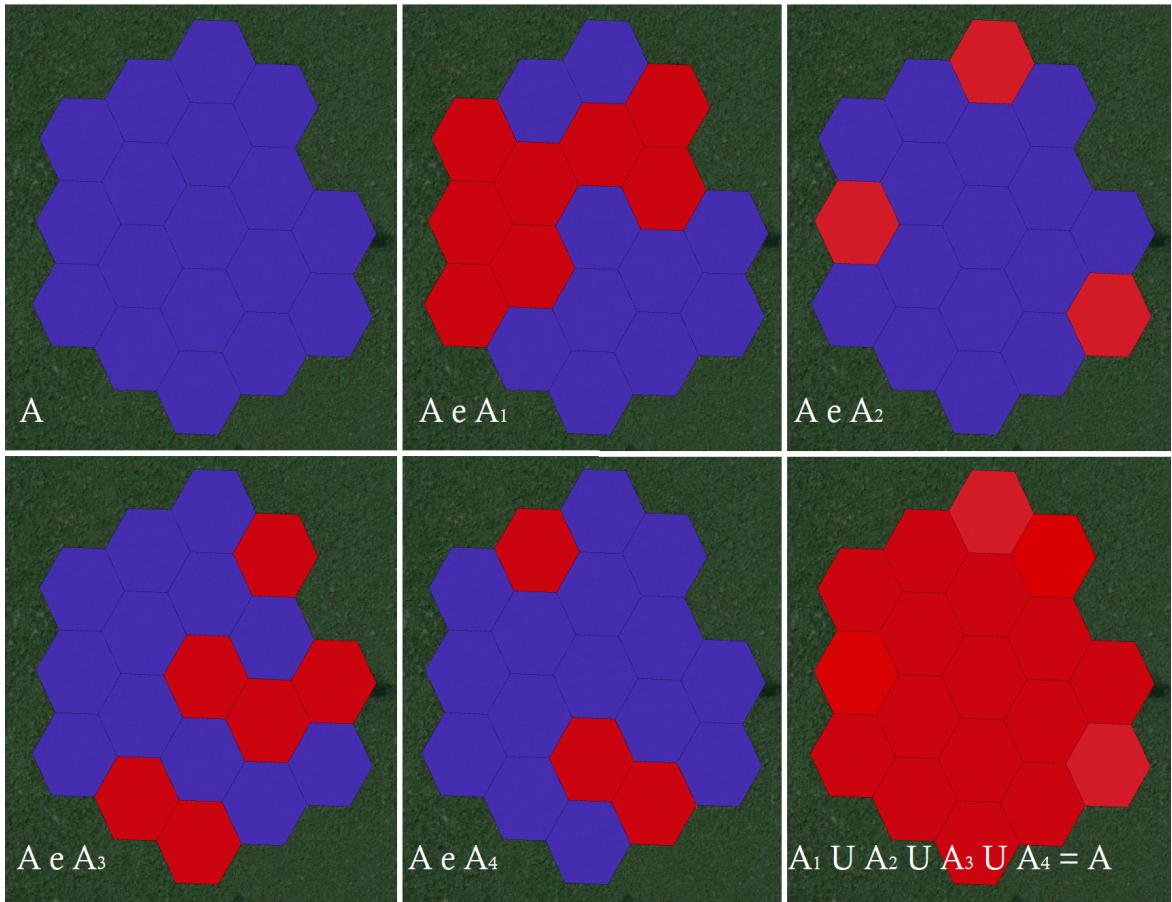
A Figura 5 exemplifica o problema sob uma ilustração de polígonos (hexágonos) preenchendo uma região geográfica. Um conjunto  $A$  representa todos os elementos (hexágonos) de uma região a ser coberta e há 4 subconjuntos  $A_1, A_2, A_3$  e  $A_4$  cuja união é igual a  $A$  (portanto, a união destes é uma cobertura de  $A$ ):

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = A$$

---

<sup>2</sup>Este benefício pode ser, por exemplo, a demanda a um determinado item de venda associada à região geográfica do elemento para uma empresa que busca escolher onde instalar suas lojas; ou, no exemplo deste trabalho, o número de pessoas naquela região, passíveis de usufruírem de serviços de telefonia móvel.

Figura 5: Cobertura de Conjuntos



Fonte: Elaboração própria a partir do software kepler.gl

No exemplo,  $n = 4$  (há 4 subconjuntos de  $A$  disponíveis, que especificamente nesse caso formam uma cobertura) e  $m = 18$  (existem 18 elementos/hexágonos em  $A$ ).

### 3.3.2 Modelagem

A modelagem do problema, conforme trazem ARENALES et al. (2006), pode ser exposta como:

$$\begin{aligned} & \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \mathbf{Dx} \geq \mathbf{1} \\ & \mathbf{x} \in B^n, \end{aligned}$$

onde:

- $\mathbf{c}$  é um vetor  $(m \times 1)$ , em que cada  $c_i$  equivale ao custo associado a  $A_i$
- $\mathbf{x}$  é um vetor  $(m \times 1)$ , em que

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{se o subconjunto } A_j \text{ é selecionado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- $\mathbf{1}$  é um vetor  $(m \times 1)$  com componentes iguais a 1
- a matriz  $\mathbf{D}$  é dada pelos parâmetros

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in A_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Ou seja, deve-se minimizar o custo associado às escolhas de subconjuntos  $A_j$  de modo que todo elemento de  $A$  seja integrante de pelo menos 1 subconjunto escolhido. Trata-se de um problema de programação linear inteira, uma vez que há associações lineares entre as variáveis, que devem ser inteiras.

De acordo com ARENALES et al. (2006), trata-se de um problema *NP-complete*.

### 3.3.3 Exemplo de Modelagem

Vejamos essa modelagem aplicada a um exemplo. Considere  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e os seguintes subconjuntos de  $A$ :

$$A_1 = \{1, 2, 3\}, A_2 = \{1, 2\}, A_3 = \{2, 4\}, A_4 = \{3, 4\}, A_5 = \{2\}$$

, e considere o vetor de custos  $\mathbf{c} = [40 \ 35 \ 40 \ 20 \ 10]$

O problema é:

$$\begin{aligned} \min z &= [40 \ 35 \ 40 \ 20 \ 10] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \\ \text{s.a. } & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix} \in B^5 \end{aligned}$$

A solução para o problema pode ser obtida através da biblioteca *scipy* da linguagem

de programação *Python*. Esta biblioteca possui funcionalidades de resolução de problemas de programação linear. Através do módulo *milp*, é possível a obtenção de soluções para problemas de programação linear inteira mista, como é o caso. Vale notar que o módulo resolve problemas de minimização e não aceita restrições com o sinal de maior ou igual, de modo que deve-se adaptar as restrições.

É possível escrever o problema no formato não matricial (omitindo a repetição da restrição de que as variáveis  $x$  são binárias) e adequando as restrições para se respeitar as diretrizes da biblioteca:

min

$$z = 40x_1 + 35x_2 + 40x_3 + 20x_4 + 10x_5$$

s.a.

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 &\leq -1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &\leq -1 \\ -x_1 - x_4 &\leq -1 \\ -x_3 - x_4 &\leq -1 \end{aligned}$$

O código para a resolução é exposto abaixo. Se empregou a versão *Python 3.9* e as versões de bilbiotecas: *scipy 1.9.3* e *numpy 1.23.3*.

---

```
from scipy.optimize import linprog, milp, Bounds, LinearConstraint
import numpy as np

z = [40, 35, 40, 20, 10]

lhs_ineq = [[-1, -1, 0, 0, 0],
            [-1, -1, -1, -1, 0],
            [-1, 0, 0, -1, 0],
            [0, 0, -1, -1, 0]]

rhs_ineq = [-1, -1, -1, -1]

integrality = np.full_like(z, True) #similar a = [1,1,1,1,1]
bounds = Bounds(0, 1)

constraints = LinearConstraint(A = lhs_ineq, lb = -np.inf, ub = rhs_ineq)
```

---

```
optmilp = milp(c = z, constraints = constraints, integrality = integrality,
                bounds = bounds)
```

---

A resolução obtida é guardada na variável *optmilp* e é dada por  $z = 55$ , para  $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$ .

## 3.4 Problema da Cobertura Máxima

Esta Seção discorrerá a respeito do Problema da Cobertura Máxima<sup>3</sup>, aquele de maior similaridade com o problema enfrentado pelas operadoras e exposto neste trabalho, fornecerá sua modelagem, fará considerações a respeito da complexidade de um algoritmo que fornece a solução ótima e, em seguida, delineará o uso da heurísticas empregadas no trabalho.

### 3.4.1 Apresentação

FARAHANI et al. (2012) argumenta que, em muitas aplicações práticas, os recursos alocados não são suficientes para cobrir toda a demanda adequadamente. O Problema de Cobertura de Conjuntos impõe que todo elemento  $i$  de  $A$  deve ser coberto pela solução, o que não se aplica à busca das operadoras, uma vez que nem todo polígono (ou seja, nem toda subregião ou cliente) precisa ser coberto. Desse modo, o Problema da Cobertura Máxima é uma variante do problema anterior, na qual se busca maximizar o número de elementos cobertos.

O Problema da Cobertura Máxima foi primeiramente exposto por Church and Revelle, em 1973, conforme explica MURRAY (2016). O problema possui larga aplicabilidade, sendo empregado para a localização de diversas entidades, como posto de bombeiros, pronto-socorros, unidades de restaurantes e estações rádio-base, como é o caso deste trabalho. O problema é de tal relevância que é utilizado em um grande número de pacotes de software do tipo GIS<sup>4</sup>, como *ArcGIS* e *TransCAD*. O autor também ressalta a notória atualidade do problema dado que os avanços na computação permitem respostas mais rápida dos sistemas, regiões de estudo maiores examinadas, e mais variáveis a serem consideradas nos problemas.

---

<sup>3</sup>Em muitos trabalhos na língua inglesa, o problema é denotado como *Maximum Covering Location Problem* ou *Maximum Covering Location Model* ou *Maximal Coverage Location Problem*.

<sup>4</sup>*Geographic Information System*.

Soluções exatas e heurísticas são propostas para o problema. DASKIN (1995) apresenta o algoritmo de força bruta para a solução do problema, além de algoritmos gulosos (*Greedy Adding* e *Greedy Adding and Substitution*) e da Relaxação Lagrangiana. BERMAN; KRASS (2005) desenvolvem uma formulação de Programação Inteira para o problema da *Uncapacitated Facility Location* (UFLP) com ganho de tempo de computação; o problema da Cobertura Máxima pode ser considerado um subconjunto dos problemas do tipo UFLP. Os autores explicam como advém a redução de tempo de execução: " *The new formulation retains all of the attractive features of the 'standard' formulation, but may have substantially smaller dimensionality. (...) the new formulation decreased the solution times for UFLP by several orders of magnitude compared to the standard formulation*" .(BERMAN; KRASS, 2005, p.33).

REVELLE; SCHOLSSBERG; WILLIAMS (2008) aplicam a metaheurística<sup>5</sup> *heuristic concentration* (HC) para a solução de grandes casos do Problema de Cobertura Máxima. A base comparativa que empregaram, ao se avaliar esse método, foi a resolução exata via o método *branch and bound* da programação linear. O método metaheurístico se provou adequado, uma vez que foram obtidas soluções com valores da função objetiva não piores do que 0,543%, em relação à solução exata, juntamente a tempos de execução consideravelmente menores. Os autores discutem esses resultados obtidos afirmando: " *Although HC was not successful in finding the actual optimal solution in many cases, these small gaps in objective values are negligible*" (REVELLE; SCHOLSSBERG; WILLIAMS, 2008, p.431).

Um problema encontrado nos algoritmos gulosos que serão detalhados é que não se tem uma medida de quão afastada da solução ótima a sub-ótima encontrada está, conforme explica DASKIN (1995). A abordagem da Relaxação Lagrangiana fornece um limiar máximo para o valor da função objetivo, que pode ser sucedida pela aplicação de algum dos algoritmos gulosos.

MURRAY (2016) também cita que diversos softwares de otimização foram utilizados com sucesso para a resolução do Problema de Cobertura Máxima, como *Gurobi Optimizer*, *IBM ILOG CPLEX*, *FICO Xpress* e *LP\_Solve*.

Uma consideração importante relacionada aos dados geralmente associados ao Problema da Cobertura Máxima é que a representação do espaço geográfico pode facilmente incorrer em erro, conforme o alerta MURRAY (2016). Neste trabalho, a representação geográfica foi delineada no Capítulo 4.

---

<sup>5</sup>"Metaheuristics are general algorithmic frameworks, often nature-inspired, designed to solve complex optimization problems" (BIANCHI et al., 2009, p.239).

### 3.4.2 Modelagem

A abordagem deste problema trata cada elemento do conjunto  $A$  como dotado de uma demanda (benefício) ou custo e é definido um número de elementos a serem escolhidos (que pode ser interpretado como número de locais a se instalarem um centro de distribuição ou número de estações rádio-base a se construirão). Deve-se, portanto, escolher subconjuntos (instalações) de modo a maximizar a demanda geral obtida (ou minimizar o custo total incorrido), atentando às restrições impostas.

A modelagem do Problema da Cobertura Máxima, baseada em DASKIN (1995), pode ser proposta como:

$$\max \sum_{i \in A} h_i Z_i \quad (3.1)$$

$$\text{s.a. } Z_i \leq \sum_{j \in J} d_{ij} x_j, \quad \forall i \in A \quad (3.2)$$

$$\sum_{j \in J} x_j \leq P \quad (3.3)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in J \quad (3.4)$$

$$Z_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in A \quad (3.5)$$

Onde:

$$Z_i = \begin{cases} 1, & \text{se o elemento } i \in A \text{ é coberto} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{se o subconjunto } A_j \text{ é selecionado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Além disso, temos os parâmetros:

$$h_i = \text{demanda do elemento } i \in A$$

$$P = \text{número de instalações (número de instalações selecionadas)}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in A_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A função objetivo (3.1) busca maximizar o número de demandas cobertas de modo que:

- A demanda do elemento  $i$  é suprida se pelo menos um dos subconjuntos selecionados

contenha  $i$  (3.2).

- Não podem ser selecionados mais do que  $P$  subconjuntos (instalações) (3.3).
- $Z_i$  e  $x_j$  são variáveis binárias (3.4) e (3.5).

Assim como o Problema de Cobertura de Conjuntos, trata-se de um problema de programação linear inteira e é da classe *NP-complete*, conforme expõe DASKIN (1995); o que implica que *a given application instance is likely to be difficult to solve, optimally or approximately* (MURRAY, 2016, p.12).

### 3.4.3 Complexidade da Solução Exata por Enumeração

A complexidade temporal, baseando-se em DASKIN (1995), da solução exata por enumeração completa de todos os casos possíveis para  $P = 1$  (ou a primeira iteração do algoritmo guloso que veremos a seguir) é

$$O(|I||J|),$$

sendo  $|I|$  o número de elementos totais (nós, ou polígonos no exemplo do problema deste trabalho) e  $|J|$  o número total de instalações disponíveis.

Caso se continuasse enumerando todos os casos, de modo a se obter uma solução exata, a complexidade seria de, pelo menos, conforme DASKIN (1995),

$$O\left(|I|\binom{|J|}{P}\right).$$

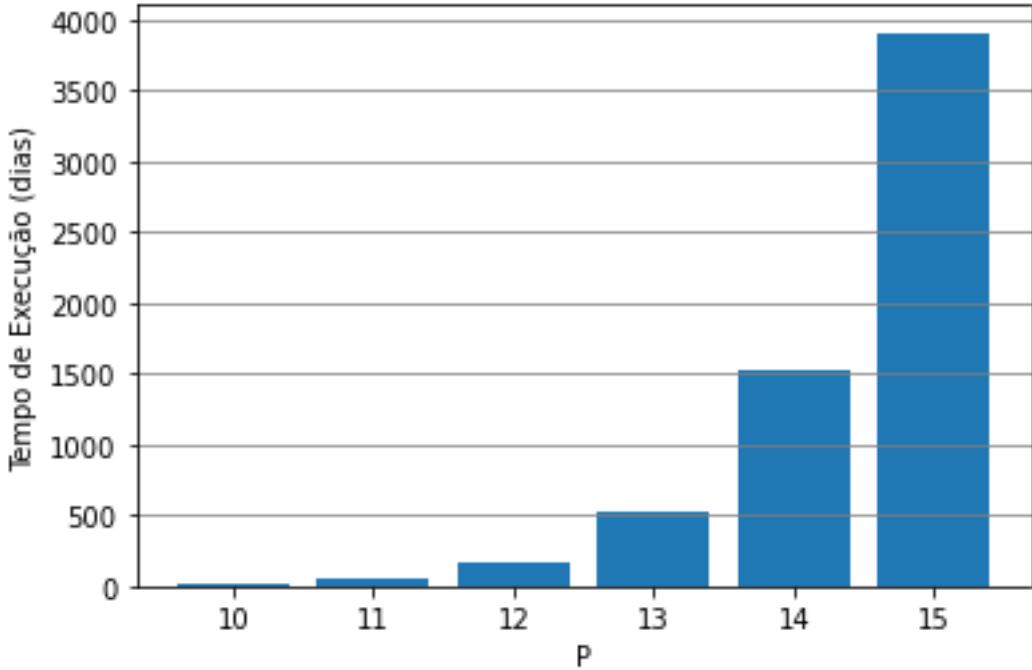
Ou de

$$O\left(|I|\binom{|J|}{P}\right),$$

caso se contem as operações para checagem se cada  $i \in I$  é coberto subconjunto  $j \in J$  em questão.

O tempo de execução desta solução exata por enumeração, assumindo um poder computacional de  $10^7$  operações por segundo, pode ser observado na Figura 6, para  $|I| = 100$  e  $|J| = 50$ . Para  $P = 10$  seriam necessários 12 dias para a resolução deste problema; já para  $P = 15$ , seriam necessários cerca de 3900 dias (mais de 10 anos).

Figura 6: Tempo de Execução da Solução Exata por Enumeração (dias)

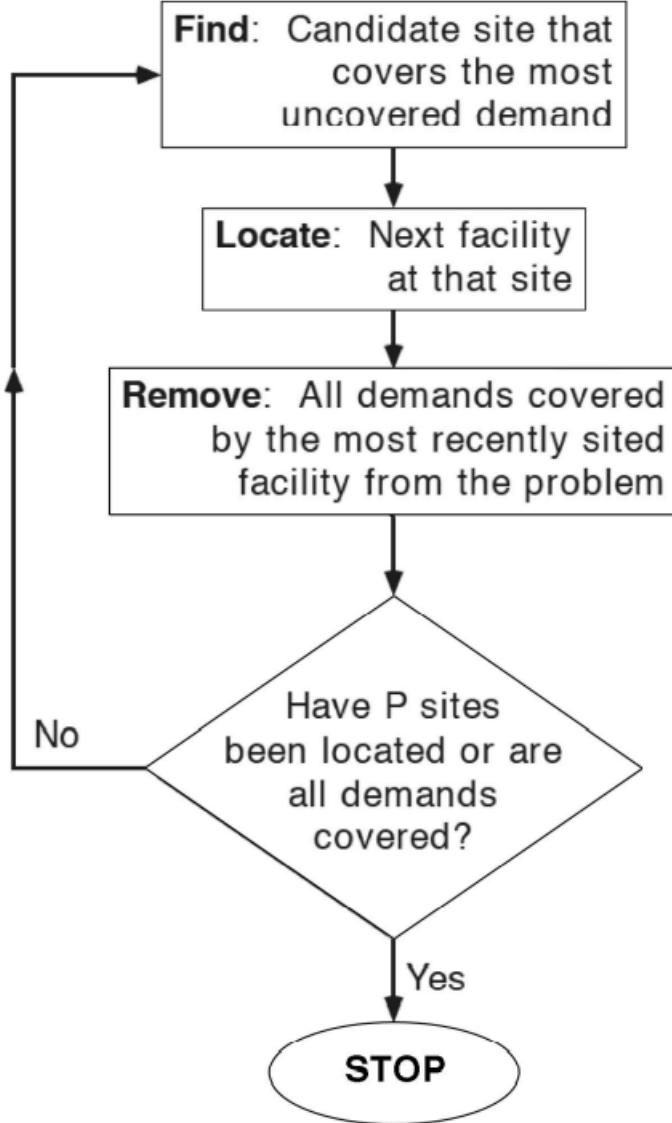


Fonte: Elaboração Própria

### 3.4.4 Algoritmo *Greedy Adding*

Conforme visto na Seção 2.7, as técnicas heurísticas permitem a diminuição do número de avaliações necessárias para se chegar à solução, envolvendo um tempo de execução viável; e os algoritmos gulosos são uma classe de métodos heurísticos de categorização que realizam decisões que levam ao maior benefício local a cada iteração. Dada a grande complexidade temporal da solução exata por enumeração completa, acarretando tempos grandes até para pequenos valores de  $P$ , soluções mais rápidas, apesar da potencial perda da solução ótima, ganham relevância.

Conforme expõe DASKIN (1995), uma solução heurística para o Problema da Cobertura Máxima pode ser fornecida pelo algoritmo *Greedy Adding*. Ela seleciona inicialmente a instalação (ou subconjunto) que coleta a maior demanda, o fixa como integrante da solução final, e em seguida escolhe a próxima instalação que melhor coleta demanda, também o fixando e continuando o processo até o número  $P$  de instalações selecionadas ser atingido. O fluxograma do algoritmo pode ser observado na 7.

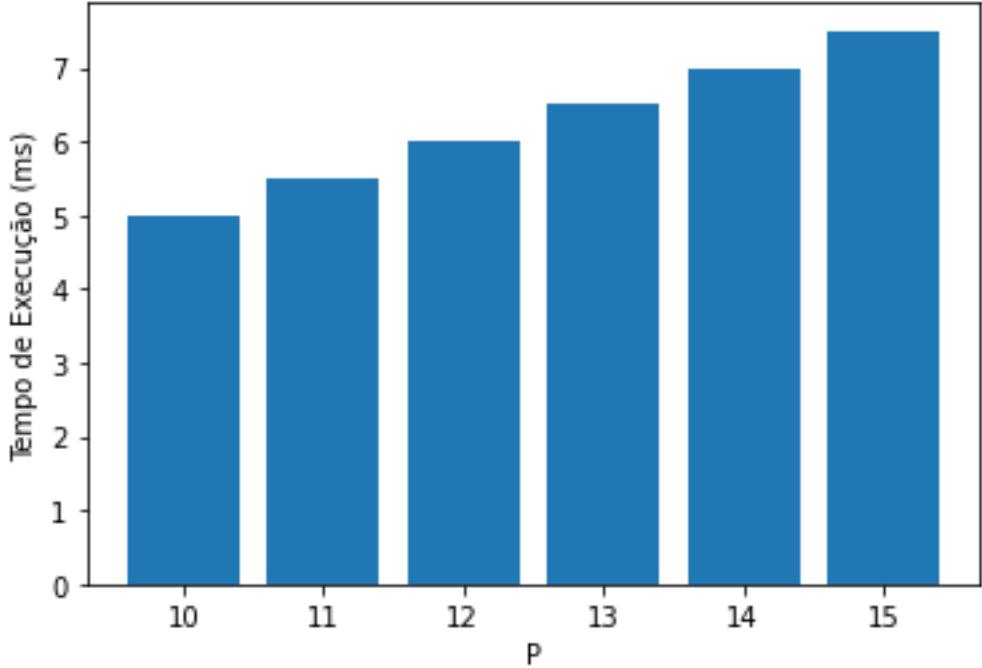
Figura 7: Fluxograma do Algoritmo *Greedy Adding*

Fonte: DASKIN (1995)

Após a escolha da primeira instalação (que possui complexidade  $O(|I||J|)$ ), a escolha seguinte da melhor instalação (após fixada a primeira) também possui complexidade  $O(|I||J|)$ , e assim por diante. Portanto, a complexidade do algoritmo *Greedy Adding* é  $O(|I||J|P)$ .

A Figura 8 demonstra como os tempos de execução foram drasticamente reduzidos. Para  $P = 15$ , por exemplo, a solução pode ser encontrada em 7,5 ms, e não mais 10 anos (assumindo, novamente,  $|I| = 100$  e  $|J| = 50$ ).

Figura 8: Tempo de Execução do algoritmo *Greedy Adding* (milissegundos)



Fonte: Elaboração Própria

### 3.4.5 Algoritmo *Greedy Adding and Substitution*

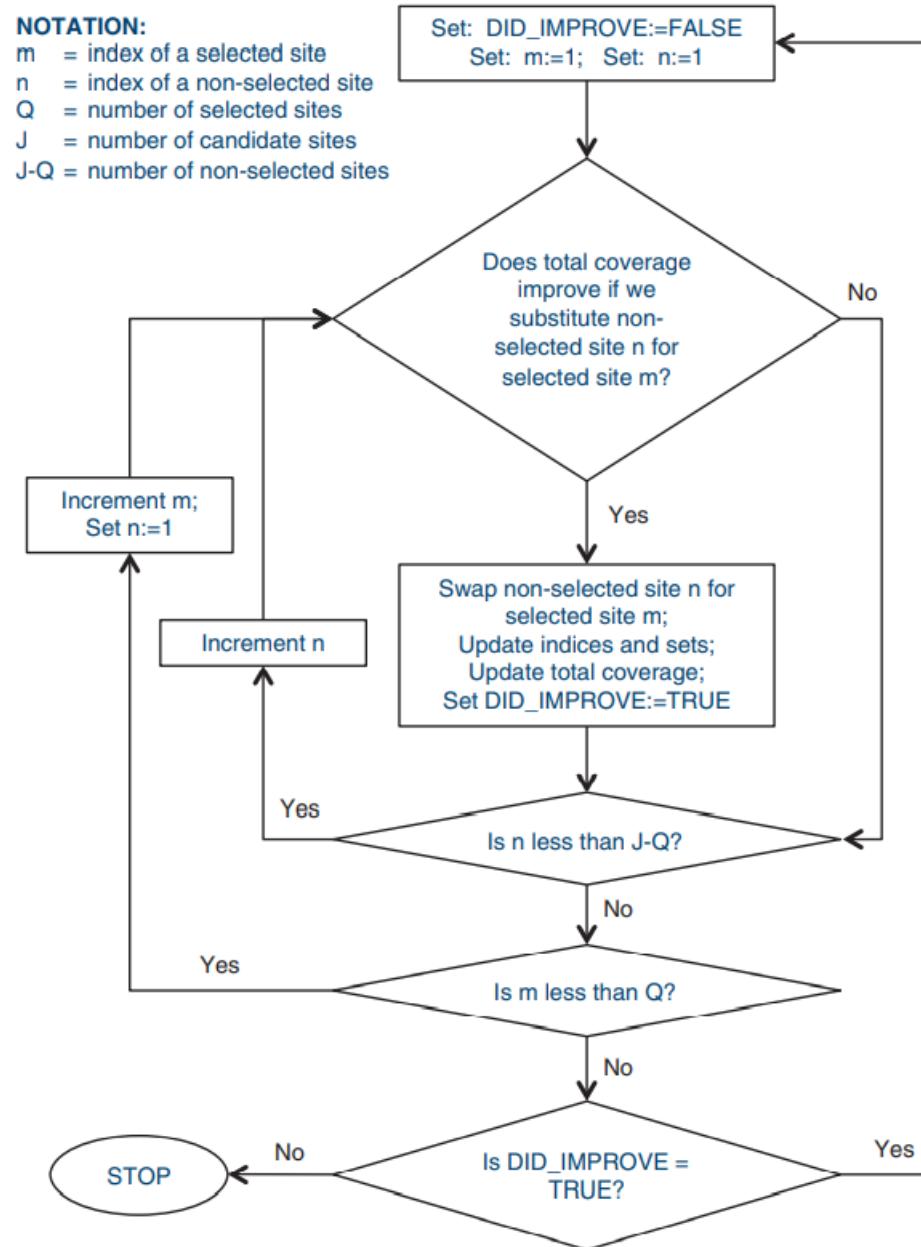
Outra solução heurística para o Problema da Cobertura Máxima é o algoritmo *Greedy Adding and Substitution*. Com base em DASKIN (1995), após a escolha de uma instalação, o algoritmo avalia a possibilidade de se substituir uma das instalações escolhidas por outra ainda não escolhida; ou seja, se considera a remoção de cada uma selecionada seguida pela substituição por cada uma não selecionada. Caso a troca ocasiona aumento da função objetivo, ela é efetuada. Esse processo prossegue até que não haja mais trocas que gerem tais aumentos.

Vale notar que a implementação em si do algoritmo pode assumir várias formas. A substituição, por exemplo, pode ser efetuada assim que se encontrou alguma não selecionada que gere aumento; ou pode-se, para cada instalação selecionada, percorrer a lista de todas as instalações ainda não selecionadas para, então, gerar a troca que ocasiona o maior aumento; ou ainda, percorrer todas as selecionadas e não selecionadas e só realizar a troca após a avaliação de todas.

O algoritmo pode ser implementado como um complemento do *Greedy Adding*, avaliando trocas entre instalações selecionadas e instalações não selecionadas. O fluxograma da parte específica referente ao *Greedy and Substitution Algorithm* pode ser visto na 9.

$m$  é uma variável que itera em relação às instalações selecionadas, enquanto  $n$  itera sobre as não selecionadas;  $Q$  indica o número de instalações selecionadas e  $J$ , o número total de instalações.

Figura 9: Fluxograma do Algoritmo *Greedy Adding and Substitution*



Fonte: DASKIN (1995)

Em relação ao algoritmo anterior, obtém-se melhores resultados às custas de um maior tempo de execução (dado os passos adicionais de avaliações de substituição), sem, contudo, haver qualquer garantia de que a solução será ótima, conforme pontua DASKIN (1995).

## 4 TRATAMENTO DE DADOS

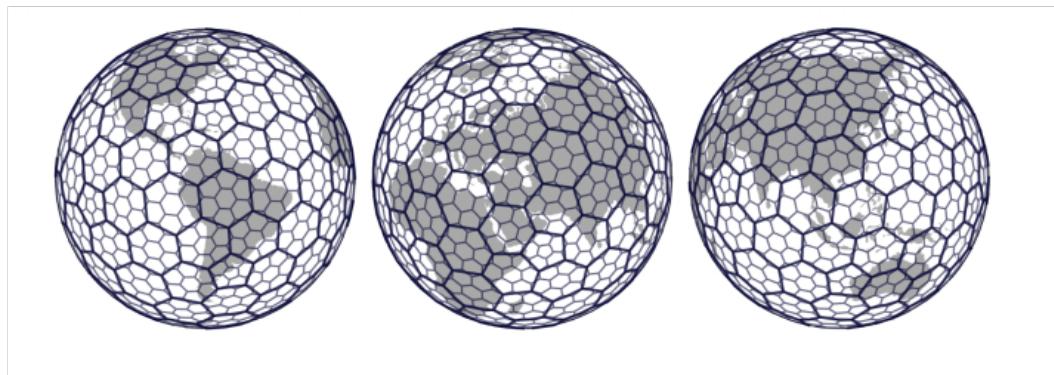
Este capítulo discorrerá a respeito de como os dados geográficos e de população são tratados e como se calculam as distâncias entre estações, de modo a se organizar o problema e permitir sua modelagem e resolução

### 4.1 Metodologia H3

O tratamento computacional de dados geográficos envolve o problema de representação de pontos e geometrias da superfície terrestre nos algoritmos, necessário para objetivos como delineamento de rotas, cálculo de distâncias e, no contexto deste trabalho, expressão da área de cobertura de uma estação. A cobertura indica quais porções do território geográfico estarão cobertas e, por consequência, quais indivíduos serão cobertos pelo sinal da estação. A associação de população a áreas geográficas é facilitada pelo agrupamento de dados populacionais em polígonos, de modo que a população encontrada nas coordenadas contidas por um determinado polígono estará associada ao mesmo. Além disso, o trabalho com polígonos discretiza o conjunto infinito de coordenadas passíveis de abrigarem uma nova estação, de modo que pode-se trabalhar com um conjunto finito a partir do qual serão selecionadas torres.

A empresa estadunidense Uber Technologies Inc. desenvolveu uma metodologia para resolver essas questões denominada H3. As especificações da metodologia podem ser acessadas no sítio [H3geo](#). O modelo consiste em fragmentar a superfície terrestre em conjuntos de hexágonos, conforme pode ser visualizado na Figura 10.

Figura 10: H3: Fragmentação da Superfície Terrestre em Hexágonos



Fonte: BRODSKY, 2018

O número de hexágonos escolhidos para cobrir o globo, e consequentemente a dimensão de cada hexágono, depende de um parâmetro denominado *resolução*. Como demonstra a Tabela 1, conforme se aumenta a resolução, maior o número de hexágonos utilizados e menores as dimensões individuais de cada um.

Tabela 1: Resolução H3

Resolução do H3	Área Média do Hexágono ( $km^2$ )	Comprimento Médio da Aresta do hexágono (km)	Número de Hexágonos
0	4250546,85	1107,71	122
1	607220,98	418,6760055	842
2	86745,85	158,2446558	5882
3	12392,26	59,81085794	41162
4	1770,32	22,6063794	288122
5	252,9033645	8,544408276	2016842
6	36,1290521	3,229482772	14117882
7	5,1612932	1,220629759	98825162
8	0,7373276	0,461354684	691776122
9	0,1053325	0,174375668	4842432842
10	0,0150475	0,065907807	33897029882
11	0,0021496	0,024910561	237279209162
12	0,0003071	0,009415526	1660954464122
13	0,0000439	0,003559893	11626681248842
14	0,0000063	0,001348575	81386768741882
15	0,0000009	0,000509713	569707381193162

Fonte: Adaptado de H3GEO, 2022

### 4.1.1 Razões para o Emprego do H3

A utilização de hexágonos permite tratamento de um número infinito de coordenadas geográficas. Essas podem ser agrupadas em hexágonos, de modo que tem-se um conjunto finito a ser tratado, e pode ser associada a qualquer coordenada as propriedades levantadas para o hexágono no qual ela está inserida. "Because cities are geographically diverse, this analysis needs to happen at a fine granularity. Analysis at the finest granularity, the exact location where an event happens, is very difficult and expensive. Analysis on areas, such as neighborhoods within a city, is much more practical" (BRODSKY, 2018).

A escolha por hexágonos também uniformiza os polígonos de análise, o que não ocorreria se fossem utilizados, por exemplo, bairros. Além disso, estes podem sofrer alterações arbitrárias ao longo do tempo, o que não ocorre comos hexágonos definidos. Caso a análise precise ser feita sobre um bairro, os hexágonos podem ser agrupados de modo a aproximarem a área daquele.

Por exemplo, a partir de levantamentos de número de pessoas residentes em endereços em uma cidade, pode-se agrupar a população contida em endereços dentro de um hexágono e obter a população residente naquele hexágono; ajustando a resolução para uma adequada, pode-se então entender a distribuição dessa população ao longo da cidade. Além da população, vários outros fenômenos podem passar pelo mesmo processo, como por exemplo dados de qualidade de sinal obtidos a partir de testes realizados, cada um em uma localização específica, sobre celulares.

#### 4.1.1.1 Escolha de Hexágonos dentre os Polígonos Disponíveis

A completa volta em um plano percorre  $360^\circ$ ; portanto, a pavimentação de um plano (no caso a projeção do globo terrestre) através de polígonos regulares só é possível caso a soma de todos os ângulos em torno do ponto de encontro das figuras seja  $360^\circ$ . Assim, caso existam  $k$  polígonos em torno do ponto, devemos ter que, sendo  $\alpha$  o ângulo interno do polígono regular:

$$k \cdot \alpha = 360^\circ \quad (4.1)$$

A relação entre  $\alpha$  e o número de lados  $n$  para um polígono regular é:

$$\alpha = \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n} \quad (4.2)$$

Portanto, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{360^\circ}{k} &= \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} \Rightarrow \\ \Rightarrow k &= \frac{2 \cdot n}{n-2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

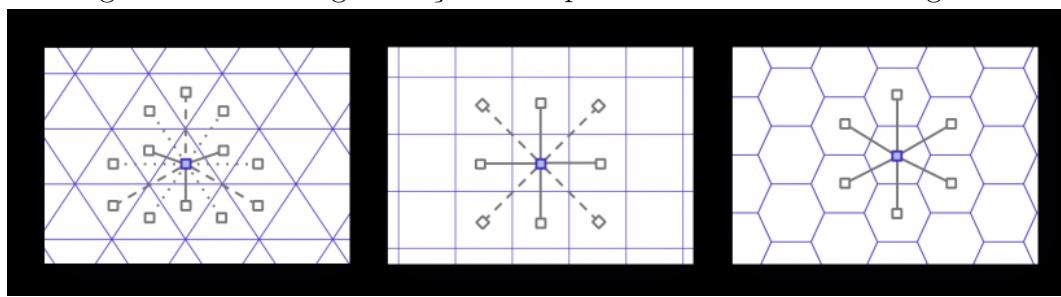
Mas o número de polígonos  $k$  deve ser pelo menos 3 (não podemos ter polígonos com lado  $180^\circ$  ou  $360^\circ$ ), então:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot n}{n-2} &\geq 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow n &\leq 6 \end{aligned} \quad (4.4)$$

O que implica que os possíveis candidatos são os polígonos regulares cujo número de lados pertencem ao conjunto  $\{3, 4, 5, 6\}$ . Contudo, desses, apenas aqueles em  $\{3, 4, 6\}$  respeitam a Equação 4.2. Portanto, as opções são o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular.

Apenas os hexágonos, no entanto, possuem a mesma distância entre o centro de um hexágono central e os centros de seus vizinhos, o que, conforme expõe BRODSKY, 2018, facilita a realização de análises e suavização de gradientes. Esse fenômeno pode ser visualizado na Figura 11.

Figura 11: H3: Fragmentação da Superfície Terrestre em Hexágonos



Fonte: Adaptado de BRODSKY, 2018

#### 4.1.2 Escolha de Fragmentação Utilizada no Trabalho

Este trabalho optou pela utilização da resolução 9, uma vez que as bases de dados utilizadas na empresa fornecedora dos dados se encontram nessa resolução. A escolha está relacionada ao fato desta resolução implicar uma área de cerca de  $0,1 \text{ km}^2$ , relacio-

nada a cobertura média das antenas de algumas soluções oferecidas pela empresa (o que demonstra como a metodologia H3 permite a fragmentação do globo de acordo com as necessidades do usuário).

A Figura 12 mostra a projeção de hexágonos de resolução 9 sobre uma imagem de satélite terrestre. Foram construídas 10 camadas de hexágonos adjacentes (chamados *anéis*) a partir de um hexágono central que contém o Marco Zero de São Paulo.

Figura 12: Hexágonos de Resolução 9 no Centro de São Paulo



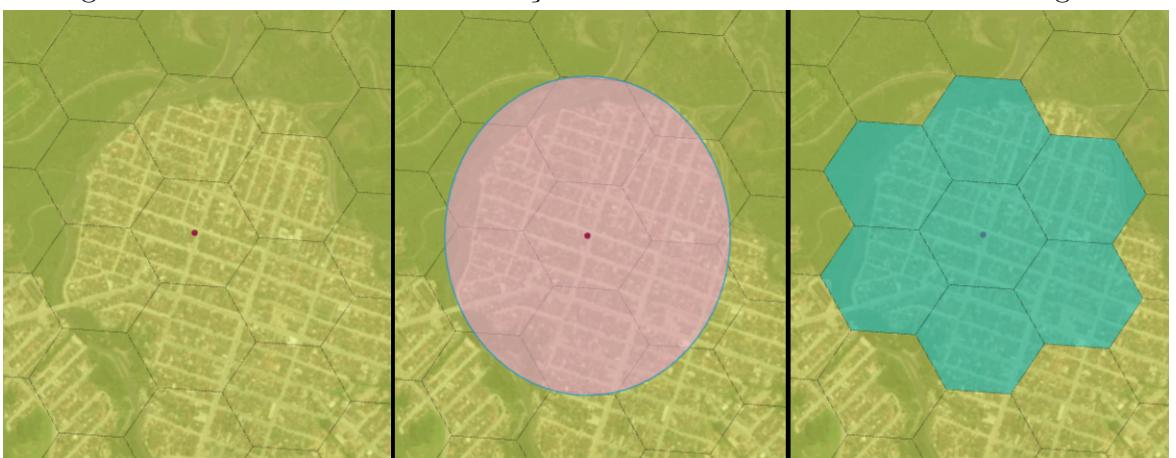
Fonte: Elaboração própria a partir do Google Earth

## 4.2 Cálculo de População a Partir dos Hexágonos

Supõe-se que uma estação localiza-se em um polígono e sua instalação nesse local implica que também estarão cobertos todos os polígonos cujo centroide dista de até o valor do raio de cobertura da estação da estação.

Este comportamento pode ser observado na Figura 13; nela temos, à esquerda, uma imagem de satélite de um subconjunto de Joinville sobreposta por uma rede transparente de hexágonos e um ponto representando a instalação de uma estação (neste caso, especificamente, o ponto está colocado no centroide do hexágono). Na imagem central há a inserção do círculo representando a cobertura desta estação (o seu aspecto visual oval se deve à projeção empregada), suposta de 0,5 km (ou seja, o raio da circunferência envolvendo o círculo é de 0,5 km e possui a estação em seu centro). À direita, são destacados os hexágonos cujo centroide está contido em tal circunferência

Figura 13: Cobertura de uma Estação Instalada no Centroide de um Polígono



Fonte: Elaboração própria a partir do software kepler.gl

Para se avaliar o peso de cada hexágono para a solução final, é necessária a obtenção da população associada a cada um. Uma base de dados interna da empresa permite a obtenção dessa associação, de modo que cada hexágono possui um valor referente à soma da população residencial e população comercial da área envolvida pelo hexágono. A primeira é formada por aqueles que habitam a área enquanto a segunda engloba aqueles empregados em pessoas jurídicas instaladas dentro do domínio do hexágono.

### 4.3 Distância entre Estações

A métrica de distância utilizada neste trabalho é Fórmula de Haversine, que calcula a distância pontos (estações, no caso)  $k$  e  $l$  considerando que estes repousam sobre superfície de uma esfera. Sejam  $\varphi_k$  e  $\varphi_l$  as latitudes dos pontos  $k$  e  $l$ , respectivamente; e  $\lambda_k$  e  $\lambda_l$  suas longitudes. A distância  $\eta_{k,l}$  é dada por:

$$\eta_{k,l} = 2 r \arcsin \left( \sqrt{\sin^2 \left( \frac{\varphi_l - \varphi_k}{2} \right) + \cos(\varphi_k) \cos(\varphi_l) \sin^2 \left( \frac{\lambda_l - \lambda_k}{2} \right)} \right)$$

A abordagem empregada neste trabalho consiste em se calcular as distâncias individuais entre todo par de estações presentes na região geográfica de interesse, de modo que podemos obter uma matriz  $G$  de elementos  $g_{kl}$  que equivalem ao módulo da distância entre as estações  $k$  e  $l$ .

A base de estações por região geográfica foi obtida a partir de dados da Anatel<sup>1</sup>. Ela informa as coordenadas de toda estação licenciada no território brasileiro, informando a operadora detentora, além de vários outras informações, como frequências empregadas e dimensões.

A partir de então, se foi escrito um código para gerar a matriz  $G$  a partir das estações presentes. Ele reúne as latitudes e longitudes de todos os pontos e aplica a Fórmula de Haversine, a partir da função vista no código abaixo (escrito na versão *Python 3.9*).

---

```
import numpy as np
def haversine(lat1, lon1, lat2, lon2):
    KM = 6371
    lat1, lon1, lat2, lon2 = map(np.deg2rad, [lat1, lon1, lat2, lon2])
    dlat = lat2 - lat1
    dlon = lon2 - lon1
    a = np.sin(dlat/2)**2 + np.cos(lat1) * np.cos(lat2) * np.sin(dlon/2)**2
    c = 2 * np.arcsin(np.sqrt(a))
    total_km = KM * c
    return total_km
```

---

<sup>1</sup>Disponível em [Anatel](#).

## 5 MODELAGEM DO PROBLEMA

Localizar estações rádio-base de modo a se maximizar o número de pessoas cobertas em uma região geográfica é um problema que se aproxima muito do Problema de Cobertura Máxima. Busca-se a seleção de estações cujos raios de cobertura englobem a máxima população. No entanto, o contexto de irradiação de ondas eletromagnéticas impõe uma restrição adicional, conforme visto na Seção 2.7.

O modelo é de programação linear inteira mista. Serão testados cenários com parâmetros e modelagens diferentes, conforme exposto ao longo deste capítulo.

### 5.1 Cenário 1: Fixação do Número de Estações

Ao Problema da Cobertura Máxima é agregada a restrição referente à mínima distância entre duas estações. Essa restrição, conforme delineado na Seção 4.3, impõe que duas estações somente podem ser selecionadas para o conjunto de estações da solução final caso a distância entre elas seja superior a um parâmetro de distância mínima  $R$  (variável que representa a mínima distância permitida entre duas estações selecionadas, escolhida como equivalente ao raio de cobertura das estações).

O resultado final do cálculo de distâncias, e que será utilizado como entrada para o problema, é uma matriz  $G$  cujos elementos  $g_{kl}$  equivalem ao módulo da distância, em km, entre as estações  $k$  e  $l$ .

A modelagem final do problema no Cenário 1 é vista abaixo, no modelo de programação linear inteira mista.

$$\max \sum_{i \in A} h_i Z_i \quad (5.1)$$

$$\text{s.a. } Z_i \leq \sum_{j \in J} d_{ij} x_j, \quad \forall i \in A \quad (5.2)$$

$$\sum_{j \in J} x_j \leq P \quad (5.3)$$

$$\eta_{k,l} \geq M(2 - x_k - x_l) + R \quad (5.4)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \forall j \in J \quad (5.5)$$

$$Z_i \in \{0, 1\}, \forall i \in A \quad (5.6)$$

Onde os termos são equivalentes àqueles expostos na Seção 3.4.2 e temos a inclusão da Equação 5.4, onde  $\eta_{k,l}$  representa a distância entre duas estações  $k$  e  $l$ , calculada através da Fórmula de Haversine (Seção 4.3).

Esta equação indica que a distância, obtida como entrada através da matriz  $G$ , deve ser maior que a distância mínima  $R$  somada ao produto de  $M$ , um número suficientemente grande, pela expressão  $2 - x_k - x_l$ . Ou seja, caso ambas as estações constem na solução final, teremos  $x_k = 1$  e  $x_l = 1$ , de modo que a expressão se resume a  $\eta_{k,l} > R$ , que é justamente a condição de distância necessária para duas estações escolhidas. Caso apenas uma estação seja escolhida, a expressão é  $\eta_{k,l} > M + R$  e caso nenhuma seja escolhida,  $\eta_{k,l} > 2M + R$ . Portanto  $M$  deve ser tal que torne válida a expressão para quaisquer pares  $k$  e  $l$  de estações, de modo que uma escolha adequada poderia ser a maior distância encontrada na matriz  $G$  (ou seja, a distância máxima entre duas estações presentes na região geográfica).

## 5.2 Cenário 2: Acréscimo Populacional por Estação

A busca por restrições que não fixassem o número de estações, permitindo maior versatilidade da solução (podendo adequar o número de estações escolhidas à região em questão), inspirou o delineamento desta versão alternativa do Problema de Cobertura Máxima. Se trata de um problema similar, porém não há um limite máximo no número de estações; no seu lugar, é definido um parâmetro de acréscimo populacional. Vale notar também que a restrição de distâncias entre estações escolhidas continua vigente.

Este cenário será aplicado para o algoritmo *Greedy Adding*, uma vez que, como será visto adiante, demonstrou resultados mais satisfatórios em termos do *tradeoff* entre tempo de execução e resultado (cobertura) obtido, para o Cenário 1.

O parâmetro de acréscimo populacional impõe uma condição para a estação  $j$  obtida após iteração do algoritmo *Greedy Adding* poder ser agregada ao conjunto de estações escolhidas. Denominando como  $H$  este parâmetro, e definindo os seguintes termos

$$\gamma_j = \text{população adicional trazida pela estação } j$$

$\Gamma$  = população coberta pela estação inicial,  
faz-se a seguinte avaliação:

$$H \leq \frac{\gamma_j}{\Gamma} \quad (5.7)$$

Caso a proposição 5.7 seja válida, a estação  $j$  é adicionada ao conjunto de estações escolhidas.

A estação inicial é aquela que primeiro integra o conjunto das escolhidas. Sua seleção se baseia no fato da sua cobertura exceder a de qualquer outra estação individualmente. Deste modo, o parâmetro avalia a razão entre o número de pessoas adicionadas ao conjunto de pessoas cobertas pela inserção da estação  $j$  e a cobertura da melhor estação individual.

Desse modo, define-se um critério de parada que permite a interrupção da busca de novas estações quando o número de pessoas agregadas ao conjunto coberto após cada iteração se torna suficientemente pequeno. Assim, o algoritmo cessa quando estão sendo agregadas poucas pessoas com cada nova estação, e não mais após um critério de número fixo de estações, que pode fazer sentido em casos de, por exemplo, limitação no montante disponível para investimento na aquisição de novas estações, mas não em outros cenários. Além disso, o algoritmo permite a interrupção precoce, caso não se estejam sendo adicionadas estações proveitosas, permitindo o emprego de um número de estações menor do que aquele alocado financeiramente pela operadora, permitindo economias.

O modelo de programação linear inteira mista que representa o problema é expresso abaixo.

$$\max \sum_{i \in A} h_i * Z_i \quad (5.8)$$

$$\text{s.a. } Z_i \leq \sum_{j \in J} d_{ij} * x_j, \quad \forall i \in A \quad (5.9)$$

$$\gamma_j \geq H * \Gamma * x_j \quad (5.10)$$

$$\eta_{k,l} \geq M(2 - x_k - x_l) + R \quad (5.11)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in J \quad (5.12)$$

$$Z_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in A \quad (5.13)$$

A única alteração na modelagem, em relação ao primeiro cenário, é que não mais há a restrição impondo um limite máximo de  $P$  estações. Ao invés, temos a Equação 5.10, que estipula que uma estação integrante do conjunto de estações escolhidas deve obedecer

à restrição do parâmetro de acréscimo populacional (5.7).

## 6 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

A partir do entendimento da natureza e modelagem do problema, pode-se partir para a sua resolução. O problema descrito no Capítulo 2 será resolvido para algumas cidades selecionadas no Brasil. Serão aplicados algoritmos vistos no Capítulo 3, com as peculiaridades do problema em questão.

As execuções deste trabalho foram realizadas no *Python3.9* através de um computador modelo G7 7588 da Dell Inc. com um processador Intel Core i7-8750H. Este é dotado de uma frequência de relógio aproximada de  $2,2 \times 10^9$  Hz; o que permitiria o cálculo do tempo teórico gasto pela execução ao definirmos as variáveis I, J e P, conforme visto na Seção 3.4.3. No entanto a alocação real da capacidade computacional para a execução do algoritmo é de difícil mensuração, e a execução do algoritmo requer a conexão com bases de dados alojadas em servidores remotos, o que traz mais incertezas em relação ao tempo.

Os algoritmos mostrados neste capítulo buscam resolver o problema delineado no Cenário 1 (Seção 5.2), com exceção do algoritmo *Greedy Adding* na Seção 6.2, que resolve tanto para o Cenário 1 quanto para o Cenário 2 (Seção 5.2). Este em específico foi escolhido dada a sua baixa complexidade temporal, além de ter apresentado resultados, no Cenário 1, muito próximos dos outros algoritmos mais complexos, conforme será visto no Capítulo 7.

### 6.1 Solução Exata por Enumeração

A Solução Exata por Enumeração é um algoritmo de simples implantação e que garante a obtenção de um resultado ótimo. No entanto, o faz à custa de uma complexidade temporal muito grande, de tal modo que existe a impossibilidade de se aplicar tal algoritmo para problemas com mais do que algumas instalações. Portanto, o algoritmo será aplicado apenas para cidades com poucas estações.

Dado que o algoritmo percorre toda combinação possível de estações, não são utili-

zados parâmetros que medem o ganho populacional com a inserção de uma nova estação (cenário 2), mas apenas a fixação do número de estações (cenário 1). O problema aqui exposto é similar ao *Maximum Coverage Problem*, que emprega uma variável  $P$  para indicar o número de instalações selecionadas, com a exceção da adição de uma restrição: as estações selecionadas devem distar uma da outra de, no mínimo, 500 m, de modo a evitar interferências eletromagnéticas que piorem a qualidade do sinal da rede.

### 6.1.1 Implementação do Algoritmo

Inicialmente, são levantadas todas as estações presentes na região geográfica delimitada, que é fracionada em hexágonos, conforme explicado na Seção 4.1; as estações são estruturas de dados que contêm um *id* de identificação, além de sua localização exposta pelo par latitude-longitude. Então, é criado um dicionário que associa a cada hexágono a sua população (vide Seção 4.2). A cada estação é agregada uma coluna de informação referente aos hexágonos cobertos pela estação, ou seja, aqueles cujo centro esteja contido no círculo de cobertura cujo centro é o par coordenado da estação (vide Seção 4.2). O pseudocódigo do algoritmo é:

---

```

estacoes #estrutura de dados que contem as estações da região
dicio_pop #dicionario que associa a cada hexagono a sua população
area_coberta #lista dos hexágonos cobertos pelas estações selecionadas
cobertura #define o raio de cobertura, em metros, de uma estação
P #define o valor de P, numero maximo de estações a serem selecionadas
popul_max = 0 #inicializa a população maxima obtida para o conjunto de estações
c_max = [] #cria a lista que contem a combinacao de estação que cobre popul_max
area_coberta_max = [] #cria a lista que contém os hexágonos cobertos pelas
                      #torres em c_max
while P > 0 and area_coberta_max == []:
    for c in combinacoes(estacoes, P): #levanta todas as combinacoes possiveis
        de P estacoes
    estacoes_escolhidas = estacoes[c] #carrega as informacoes das estacoes em
                                      #c
    for par in combinacoes(estacoes_escolhidas, 2): #checar distancia entre
        estacoes escolhidas
    d = distancia(par[0]['latitude'], par[0]['longitude'], par[1]['latitude'],
                  ], par[1]['longitude'])
    if d < cobertura:

```

```

d = -1

break #não mais se avaliarão os pares

if (d == -1 and P > 1):
    continue #se checará o c seguinte, descartando o atual

for est in c: #agrega a area_coberta os hexágonos cobertos por cada estação de c
    area_coberta.extend(estacoes[i][cobertura])

pop = dicio_pop(area_coberta) #calcula a população coberta

if popul > popul_max:
    popul_max = popul
    c_max = c
    area_coberta_max = area_coberta

P = P + 1

```

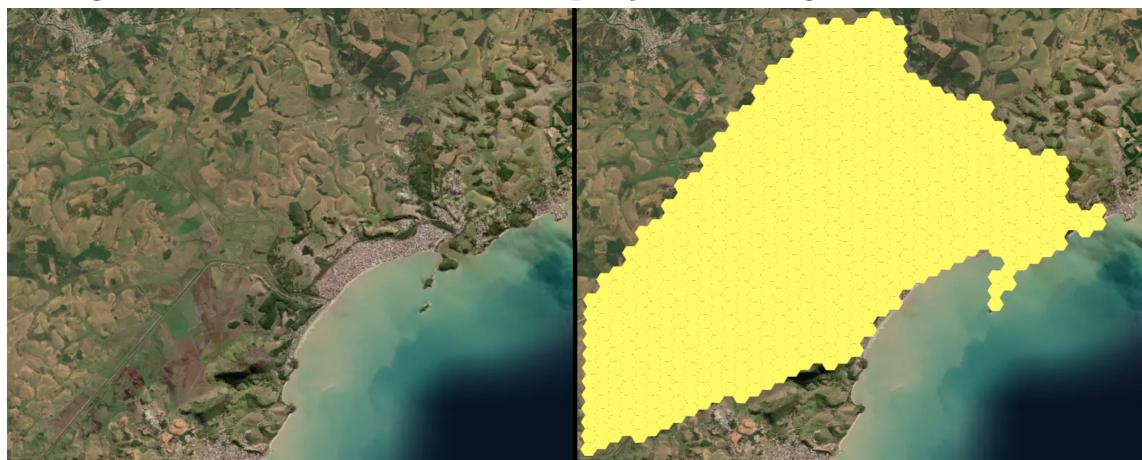
---

### 6.1.2 Exemplo de Aplicação do Algoritmo

O algoritmo foi aplicado para o município de Piúma no Espírito Santo, que possui 13 estações rádio-base e 664 hexágonos ( $I = 664$  e  $J = 13$ ) na resolução 9 (vide Seção 4.1). A população total do município, considerando a soma de população residencial e comercial (vide Seção 4.2), levantada é de cerca de 23.125 pessoas.

A Figura 14 representa, à esquerda, a vista de satélite do município e, à direita, a decomposição da sua área em hexágonos. Nota-se uma região de maior urbanização justaposta ao litoral em uma fração da costa litorânea do município.

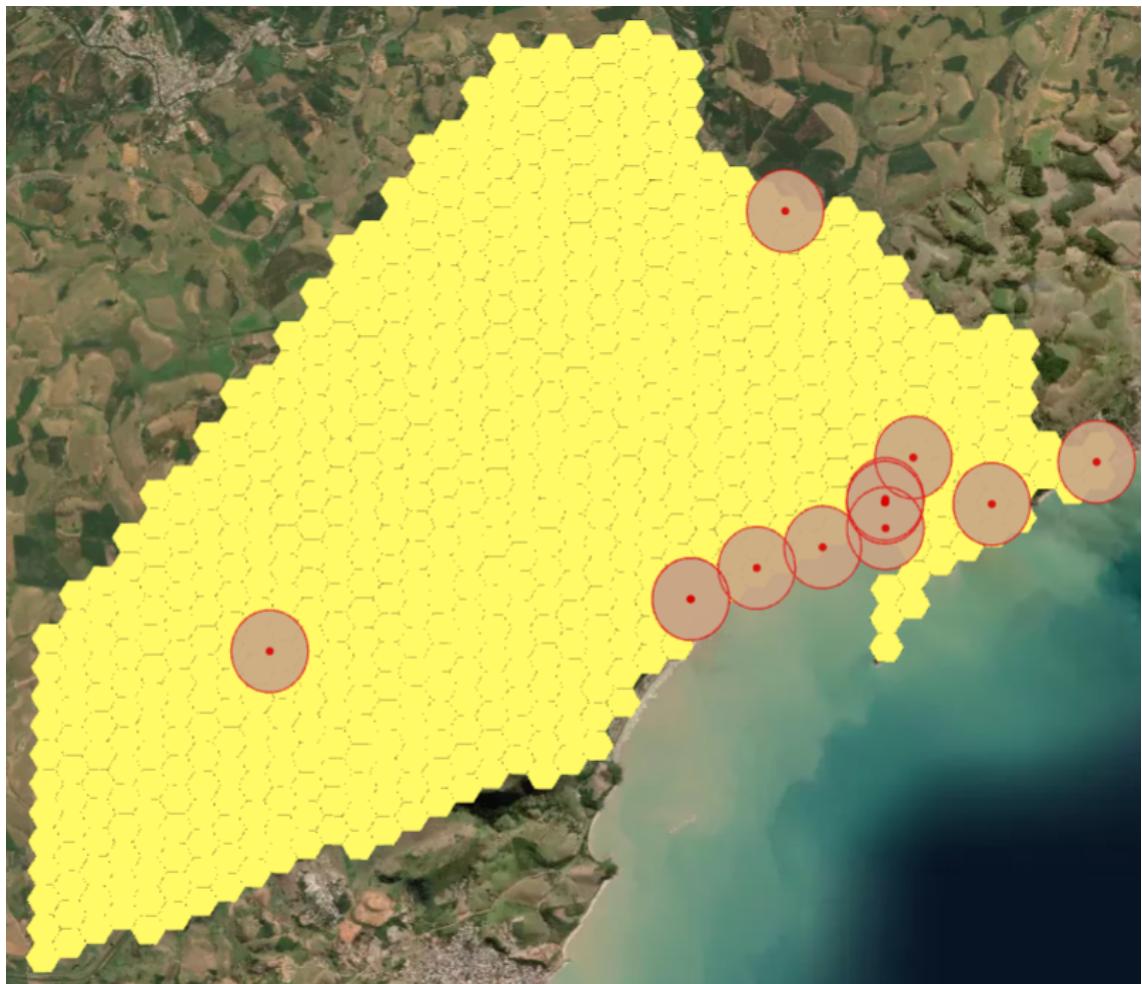
Figura 14: Visão de Satélite e Decomposição em Hexágonos de Piúma - ES



Fonte: Elaboração própria a partir do software Kepler

A Figura 15 mostra as 13 estações existentes no município. Estas são representadas através de um ponto localizado nas coordenadas da latitude e longitude da estação, circunscrita por um círculo que representa o raio de cobertura da estação. Pode-se notar a concentração de estações na região de maior adensamento populacional do município.

Figura 15: Estações Rádio-Base em Piúma - ES



Fonte: Elaboração própria a partir do software Kepler

Inicialmente foi imposto  $P = 2$ , o que implica que a iteração se dará em 91 combinações de estações:

$$\binom{13}{2} + \binom{13}{1} = 91$$

Após percorrerem todas as combinações, sendo excluídas aquelas que selecionem estações a menos de 500 m de distância, foram selecionadas, a partir da soma da população coberta, as estações mostradas na parte esquerda da Figura 16.

Figura 16: Estações Selecionadas por Enumeração em Piúma - ES para  $P = 2$



Fonte: Elaboração própria a partir do software Kepler

A população coberta por essas estações é aquela vinculada aos hexágonos em verde, na parte direita, e equivale a cerca de 6.839,79 pessoas, ou seja, temos uma cobertura de:

$$\frac{6839,70}{23125,79} = 29,58\%$$

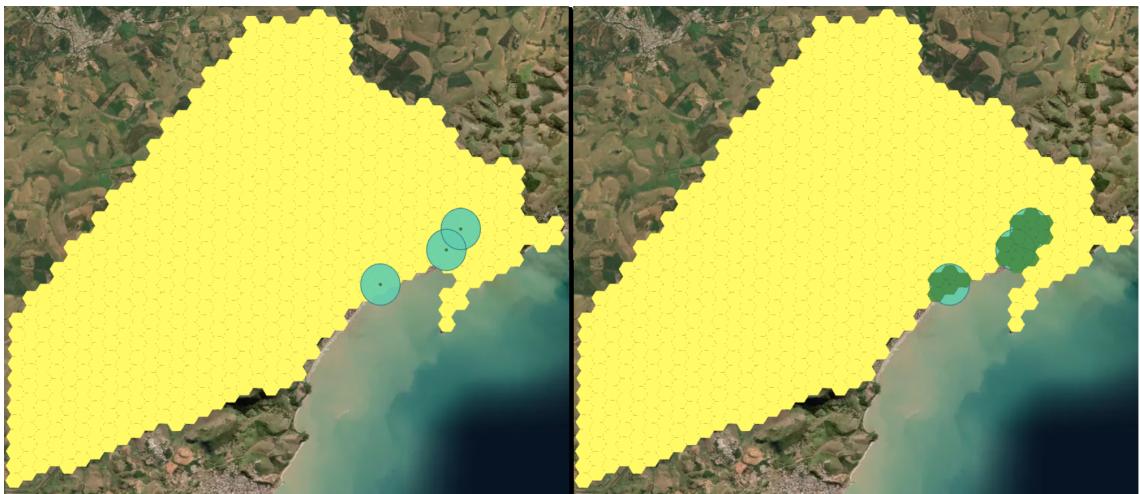
A execução do programa durou 4,44 s.

Para  $P = 3$ , temos a avaliação de 377 estações:

$$\binom{13}{3} + \binom{13}{2} + \binom{13}{1} = 377$$

São escolhidas três estações, mostradas na Figura 17.

Figura 17: Estações Selecionadas por Enumeração em Piúma - ES para  $P = 3$



Fonte: Elaboração própria a partir do software Kepler

A população coberta por essas três estações é de cerca de 8.263.99 pessoas, gerando uma cobertura de

$$\frac{8.263,99}{23.125,79} = 35,73\%$$

A execução do programa durou 7,48 s.

O aumento de  $P$  prosseguiu, gerando maiores coberturas e maiores tempos de execução progressivamente, até atingir o valor de  $P = 9$ , a partir do qual a cobertura se estabiliza em 53,57%, após uma execução de 1,74 min. Para  $P \in \{10, 11, 12\}$ , a restrição de distância entre estações impede qualquer conjunto escolhido de ter mais do que 9 estações. A Figura 18 mostra a cobertura final.

Figura 18: Estações Selecionadas por Enumeração em Piúma - ES para  $P = 9$



Fonte: Elaboração própria a partir do software Kepler

## 6.2 Algoritmo *Greedy Adding*

O *Greedy Algorithm* é uma heurística que age de forma gulosa em busca do melhor conjunto de estações. Nesta Seção serão mostradas a implementação do algoritmo e sua aplicação em uma cidade, tanto para o Cenário 1 quanto para o Cenário 2.

### 6.2.1 Cenário 1

#### 6.2.1.1 Implementação do Algoritmo

Sua implantação é mais sofisticada do que a Enumeração Completa, mas é baseada na simples ideia de se agregar ao conjunto a estação que mais acrescenta população a

cada iteração, conforme explicado na Seção 3.4.4. E isso é obtido com uma grande simplificação de complexidade, conforme também visto nessa Seção.

Inicialmente é escolhida a estação que mais cobre pessoas na região, se tornando esta então integrante do conjunto de estações selecionadas. Em seguida, se itera sobre todas as estações restantes se escolhendo aquela que acarreta o maior ganho populacional e que não infrinja a restrição de distância mínima em relação à primeira estação escolhida. O processo de iteração sobre as estações restantes se repete até que o valor de  $P$  seja atingido ou não se possa adicionar mais nenhuma estação sem violar a restrição.

A mesma estrutura de dados que agrupa as estações vista no algoritmo anterior é aplicada aqui, bem como o dicionário de população e a lista de hexágonos cobertos. O pseudocódigo do algoritmo é:

---

```

estacoes
dicio_pop
area_coberta
cobertura
P

estacoes_escolhidas.append(max(estacoes, pop)) #a primeira estação escolhida
    será aquela que cobre a maior população

while P != 0:

    poly_sim = [] #dicionário que relaciona a cada estação a população adicional
        trazida pela inserção da mesma no conjunto de estações escolhidas

    for est in estacoes:
        d = min(distancia(est, estacoes_escolhidas)) #seleciona a máxima distância
            entre est e as estações já escolhidas
        if d > cobertura:
            aux_est = est[cobertura] #carrega a lista de hexágonos cobertos por est
            list_h3 = list(set(area_coberta) + set(aux_est)) #captura os hexágonos
                adicionadas na area_coberta pela adição de est no conjunto de estações
                selecionadas
            poly_sim[est] = dicio_pop(list_h3)
        else:
            estacoes.remove(est) #caso est esteja a uma distância menor que cobertura

```

```

das estações já escolhidas, ela será descartada

if len(poly_sim) > 0: #caso tenha sido encontrada pelo menos uma estação

    aux_total_pop = poly_sim[max(poly_sim, key = poly_sim.get)] #captura a
    população máxima adicionada por uma estação no loop anterior
    estacoes_escolhidas.append(max(poly_sim, key = poly_sim.get)) #agrega a
    melhor estação

    area_coberta.extend(estacoes_escolhidas[-1] [cobertura])

    P = P - 1
else:
    break #sai do loop caso não haja mais estações disponíveis

```

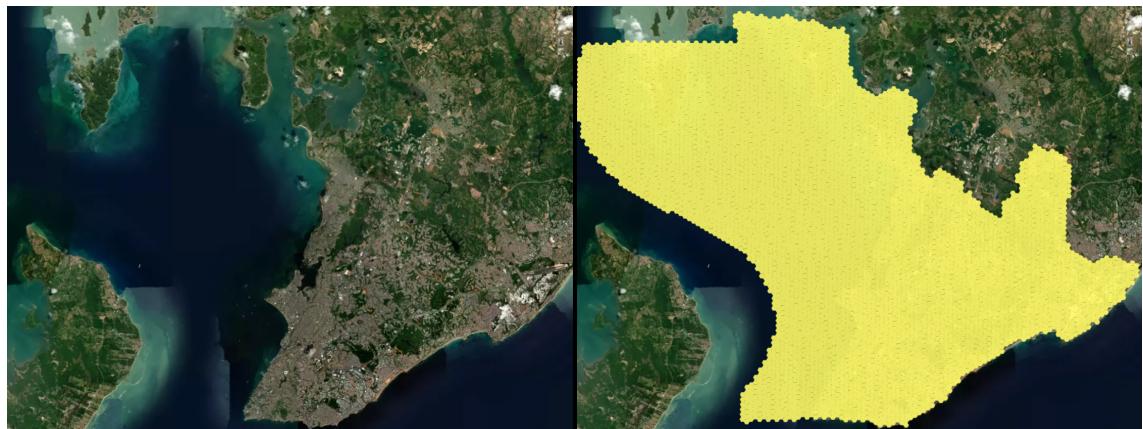
---

### 6.2.1.2 Exemplo de Aplicação do Algoritmo

A menor complexidade do algoritmo permite sua aplicação em municípios com mais estações, hexágonos e para valores de P maiores. Será ilustrado o resultado do algoritmo para o município de Salvador - BA. Este conta com 1.103 estações e pode ser dividido em 5.686 hexágonos de resolução 9. A população total levantada do município é de cerca de 3.457.395 pessoas.

A Figura 19 representa, à esquerda, a vista de satélite do município e, à direita, a decomposição da sua área em hexágonos.

Figura 19: Visão de Satélite e Decomposição em Hexágonos de Salvador - BA



Fonte: Elaboração própria a partir do software Kepler

As estações estão representadas na Figura 20 apenas como pontos vermelhos para facilitar a visualização, dado seu alto número.

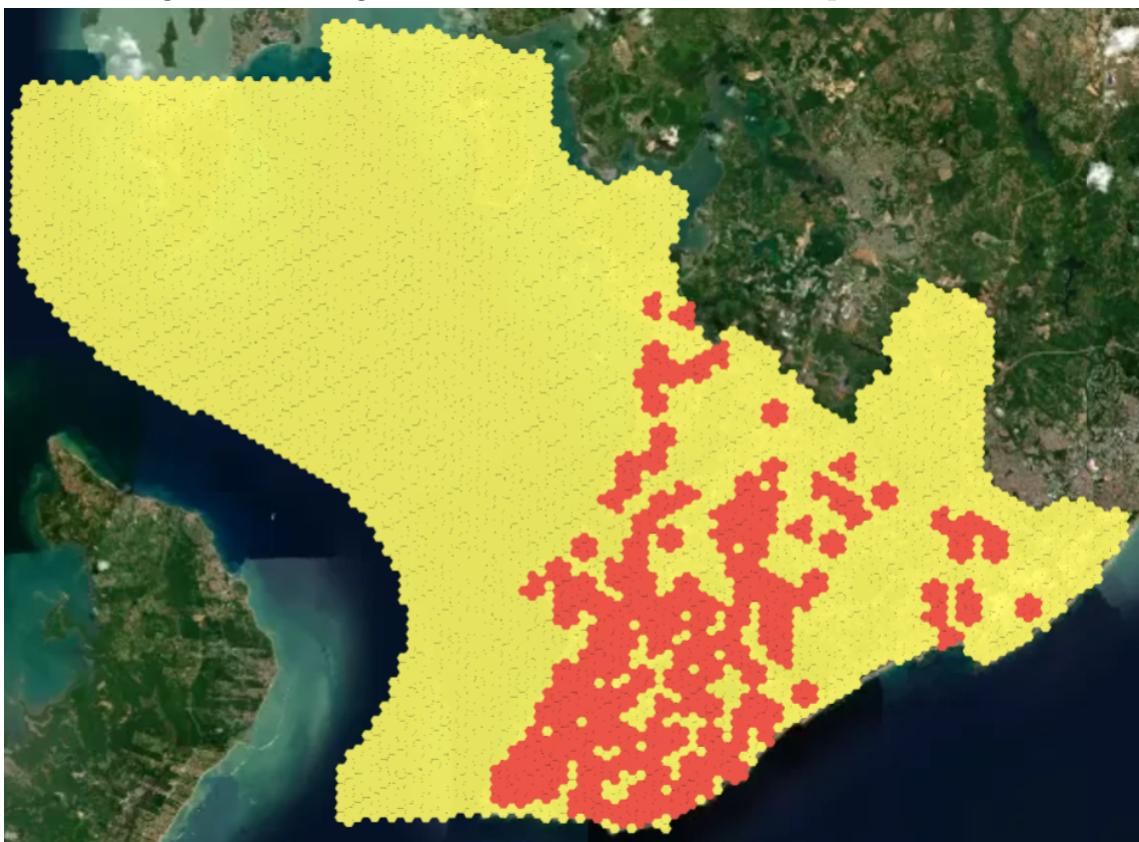
Figura 20: Estações Rádio-Base em Salvador - BA



Fonte: Elaboração própria a partir do software Kepler

Após a aplicação do algoritmo para  $P = 150$ , temos a escolha de 150 estações, cobrindo os hexágonos em vermelho na Figura 21.

Figura 21: Hexágonos Cobertos em Salvador - BA para  $P = 150$



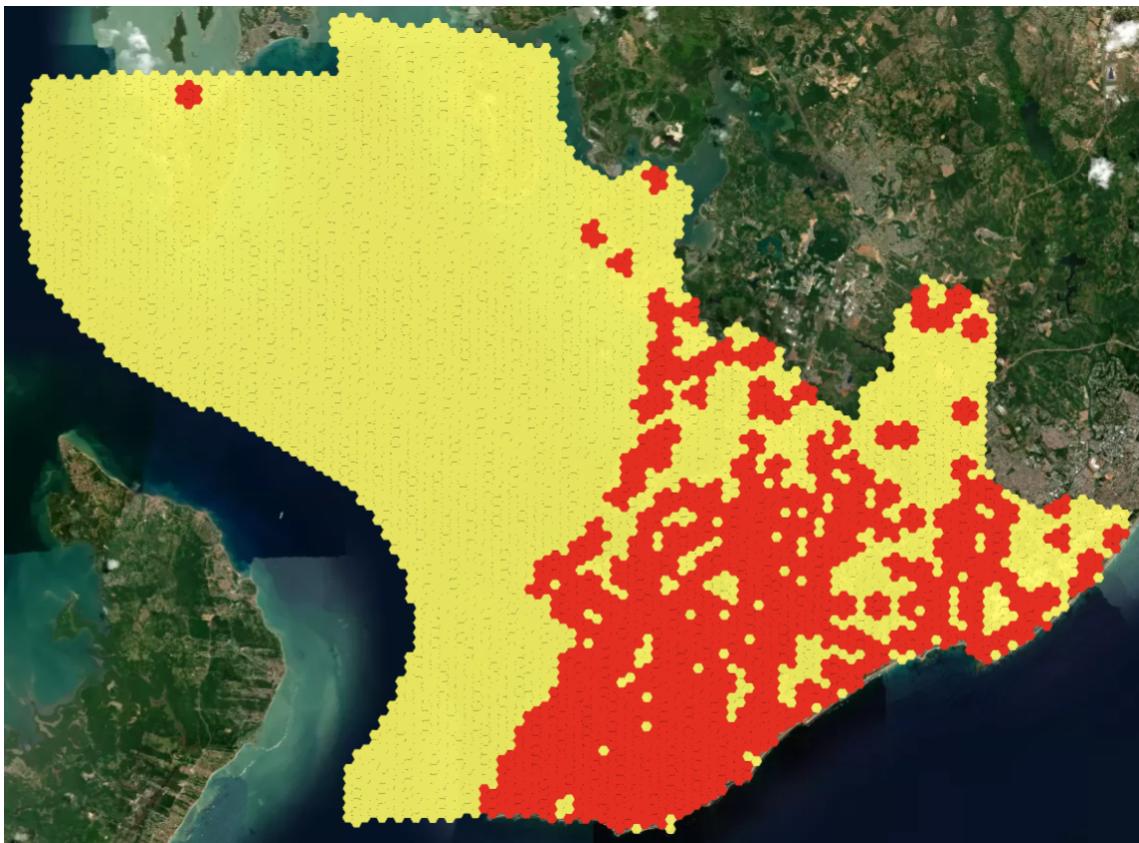
Fonte: Elaboração própria a partir do software Kepler

A execução do programa durou 32,06 s e a cobertura populacional é dada por:

$$\frac{2.537.855,72}{3.457.395,15} = 73,40\%$$

Rodou-se também o programa pra  $P = 300$ . O resultado final de hexágonos cobertos pode ser visto na Figura 22.

Figura 22: Hexágonos Cobertos em Salvador - BA para  $P = 300$



Fonte: Elaboração própria a partir do software Kepler

A execução do programa durou 49,77 s e a cobertura populacional é dada por:

$$\frac{3.013.264,97}{3.457.395,15} = 87,15\%$$

Pode-se notar também que o número de hexágonos cobertos subiu de 891, para  $P = 150$ , até 1.511, para  $P = 300$ . O número total de hexágonos do município é de 5.684.

## 6.2.2 Cenário 2

### 6.2.2.1 Implementação do Algoritmo

A ação do algoritmo é similar àquela exposta no Cenário 1, contudo o critério de parada não mais é o número de estações máximo fixado, mas sim a condição de acréscimo populacional 5.7. O algoritmo avalia se a população agregada individualmente pela estação em avaliação é superior ao produto entre  $H$  e  $\Gamma$ : em caso positivo, segue-se para a próxima iteração; em caso negativo, se encerra a execução.

```

dicio_pop
area_coberta
cobertura
H #parametro de acrescimo populacional

estacoes_escolhidas.append(max(estacoes, pop)) #a primeira estação escolhida
    será aquela que cobre a maior população

while 1:

    poly_sim = []

    for est in estacoes:
        d = min(distancia(est, estacoes_escolhidas))
        if d > cobertura:
            aux_est = est[cobertura]
            list_h3 = list(set(area_coberta) + set(aux_est))
            poly_sim[est] = dicio_pop(list_h3)
        else:
            estacoes.remove(est)

    if len(poly_sim) > 0:

        aux_total_pop = poly_sim[max(poly_sim, key = poly_sim.get)]

        if aux_total_pop < H*estacoes_escolhidas[0][cobertura]:
            break #encerra o loop caso seja violada a restrição do acréscimo
                  populacional

        estacoes_escolhidas.append(max(poly_sim, key = poly_sim.get))

        area_coberta.extend(estacoes_escolhidas[-1][cobertura])

    else:
        break

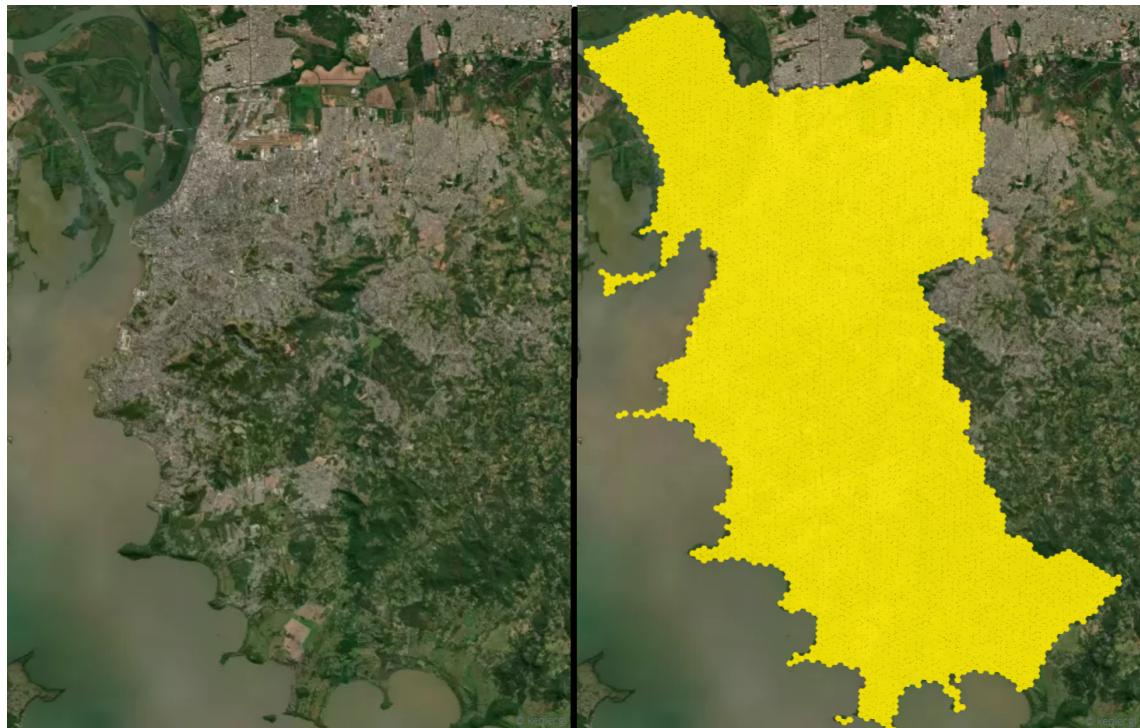
```

---

### 6.2.2.2 Exemplo de Aplicação do Algoritmo

O programa é executado na região geográfica correspondente ao município de Porto Alegre, RS, que conta com 774 estações, 5529 hexágonos e uma população de cerca de 2.050.094 habitantes. A Figura 23 representa, à esquerda, a vista de satélite do município e, à direita, a decomposição da sua área em hexágonos.

Figura 23: Visão de Satélite e Decomposição em Hexágonos de Porto Alegre - RS



Fonte: Elaboração própria a partir do software Kepler

As estações de Porto Alegre podem ser visualizadas na Figura 24.

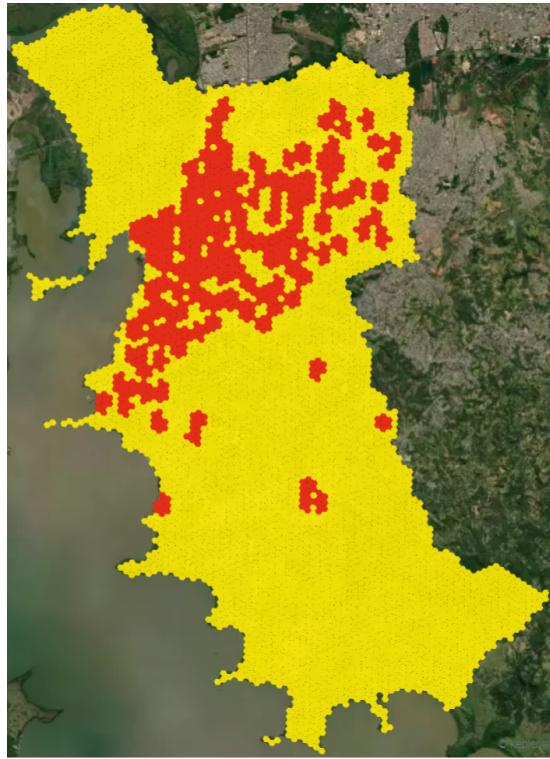
Figura 24: Estações Rádio-Base em Porto Alegre - RS



Fonte: Elaboração própria a partir do software Kepler

Este novo cenário requer a escolha do parâmetro de acréscimo populacional  $H$ , que será inicialmente imposta como 0,03, ou seja, para uma estação entrar na solução final, ela precisa adicionar pelo menos 3% do número de pessoas coberto individualmente pela estação inicial. O parâmetro  $R$  de cobertura de estações continua com o valor de 0,5. A Figura 25 mostra os hexágonos cobertos pelas estações selecionadas ao se impor tal  $H$ .

Figura 25: Hexágonos Cobertos Porto Alegre - RS para  $H = 0,03$



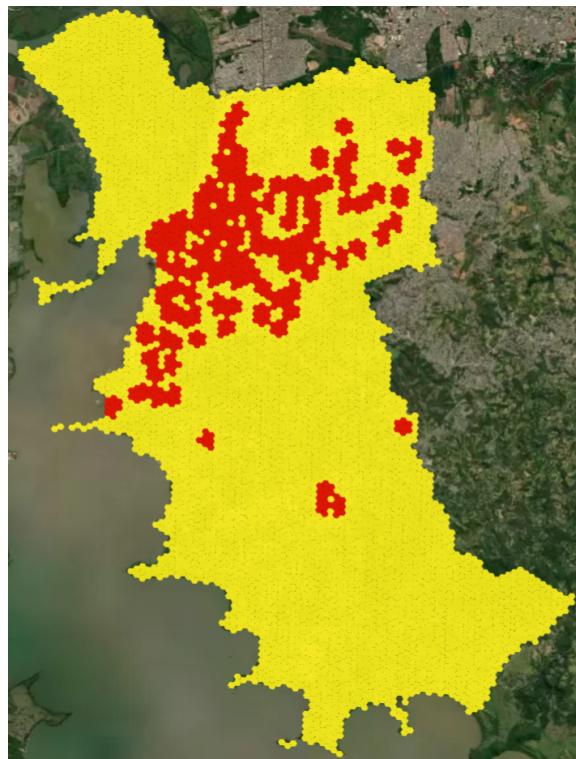
Fonte: Elaboração própria a partir do software Kepler

Foram escolhidas 133 estações, resultando numa cobertura de:

$$\frac{1.366.018,15}{2.050.093,74} = 66,63\%$$

Caso se eleve  $H$  para 0,04, a adição de uma nova estação precisará cobrir uma população maior para poder entrar na solução final, de modo que se espera que um menor número de estações seja escolhido. A Figura 26 mostra o resultado para esse novo valor.

Figura 26: Hexágonos Cobertos Porto Alegre - RS para  $H = 0,04$



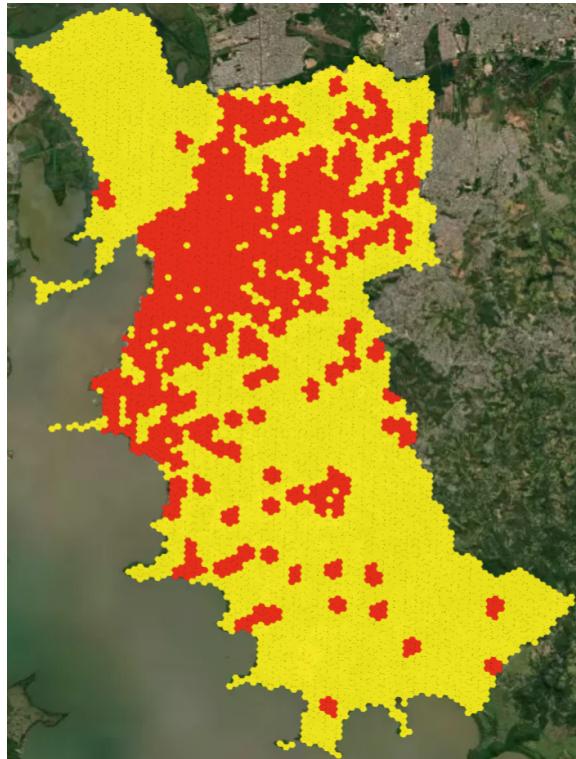
Fonte: Elaboração própria a partir do software Kepler

Conforme esperado, o número de estações selecionado diminuiu: foram selecionadas 103 estações, resultando numa cobertura de:

$$\frac{1.229.009,84}{2.050.093,74} = 59,95\%$$

Para se observar casos extremos, pode-se impôr  $H = 1$ , o que implica que apenas uma estação é escolhida - a melhor estação individualmente em termos de cobertura, resultando em uma população coberta de 6,41%. No outro extremo, temos  $H = 0$ , o que anula a restrição de acréscimo populacional, resultando numa seleção de 262 estações (a única restrição ativa que impediu a escolha de todas as estações foi a de distância mínima entre estações selecionadas) e uma população coberta de 77,87%. Os hexágonos cobertos, no cenário de  $H = 0$ , podem ser visualizados na Figura 26.

Figura 27: Hexágonos Cobertos Porto Alegre - RS para  $H = 0$



Fonte: Elaboração própria a partir do software Kepler

## 6.3 Algoritmo *Greedy Adding and Substitution*

O algoritmo *Greedy Adding and Substitution* é um algoritmo complementa o *Greedy Adding*. Esta Seção tratará da sua implementação e exemplos de aplicação do algoritmo.

### 6.3.1 Implementação do Algoritmo

Sua implementação nesse trabalho consistiu em se testar trocas entre estações escolhidas e não escolhidas, avaliando se a mudança acarretaria melhora na cobertura, conforme explicado na Seção 3.4.5. A etapa inicial (adição) é similar àquela vista no algoritmo anterior, com exceção de uma nova coluna existente na estrutura de dados das estações indicando se aquela estação está em uso ou não na solução encontrada pela primeira etapa. Em seguida se avaliam as realizações de substituições:

---

```
estacoes
dicio_pop
area_coberta
cobertura
P
```

```

# Etapa 1 - Adição

estacoes_escolhidas.append(max(estacoes, pop)) #a primeira estação escolhida
    será aquela que cobre a maior população
estacoes[max(estacoes, pop)]['em_uso'] = True #indica que a estação com maior
    população está em uso na solução final da etapa de adição

while P != 0:

    poly_sim = [] #dicionário que relaciona a cada estação a população adicional
        trazida pela inserção da mesma no conjunto de estações escolhidas

    for est in estacoes:
        d = min(distancia(est, estacoes_escolhidas)) #seleciona a máxima distância
            entre est e as estações já escolhidas
        if d > cobertura:
            aux_est = est[cobertura] #carrega a lista de hexágonos cobertos por est
            list_h3 = list(set(area_coberta) + set(aux_est)) #captura os hexágonos
                adicionados na area_coberta pela adição de est no conjunto de estações
                selecionadas
            poly_sim[est] = dicio_pop(list_h3)
        else:
            estacoes.remove(est) #caso est esteja a uma distância menor que cobertura
                das estações já escolhidas, ela será descartada

    if len(poly_sim) > 0: #caso tenha sido encontrada pelo menos uma estação

        aux_total_pop = poly_sim[max(poly_sim, key = poly_sim.get)] #captura a
            população máxima adicionada por uma estação no loop anterior
        estacoes_escolhidas.append(max(poly_sim, key = poly_sim.get)) #agrega a
            melhor estação
        estacoes[(max(poly_sim, key = poly_sim.get))]['em_uso'] = True

        area_coberta.extend(estacoes_escolhidas[-1][cobertura])

    P = P - 1
else:

```

```

break #sai do loop caso nao haja mais estacões disponíveis

# Etapa 2 - Substituição

for est_m in estacoes[estacoes['em_uso'] == True]:

    cobertos_exceto_m = [] #lista de hexágonos cobertos por todas as estações
    escolhidas, exceto a est_m
    for est_i in estacoes[estacoes['em_uso'] == True and ['id'] != est_i]:
        cobertos_exceto_m.extend(est_i[cobertura])
    h3_ganhos = list(set(est_m[cobertura]) - set(cobertos_exceto_m)) #lista de
    hexágonos que a estação est_m trouxe sozinha para o conjunto coberto

    pop_com_m = dicio_pop(list(set(h3_ganhos) + set(cobertos_exceto_m))) #populaç
    ão total coberta com est_m no conjunto

    for est_n in estacoes[estacoes['em_uso'] == False]: #itera sobre todas as
        estacoes nao escolhidas

        d = min(distancia(est_n, estacoes_escolhidas))

        if d > cobertura:
            aux_est = est_n[cobertura]
            list_h3 = list(set(cobertos_exceto_m) + set(aux_est)) #lista de hexá
            gonos cobertos com a troca de est_m por est_n
            pop_com_n = dicio_pop(list_h3) # população coberta se trocando est_m
            por est_n

            if pop_com_m < pop_com_n:
                estacoes_escolhidas = estacoes_excolhidas[estacoes_escolhidas['id']
                != id_m] #retira est_m do conjunto escolhido
                area_coberta = list_h3
                estacoes_escolhidas.append(estacoes[estacoes['id'] == est_n])
                break #nao mais avalia trocas para a est_m

```

---

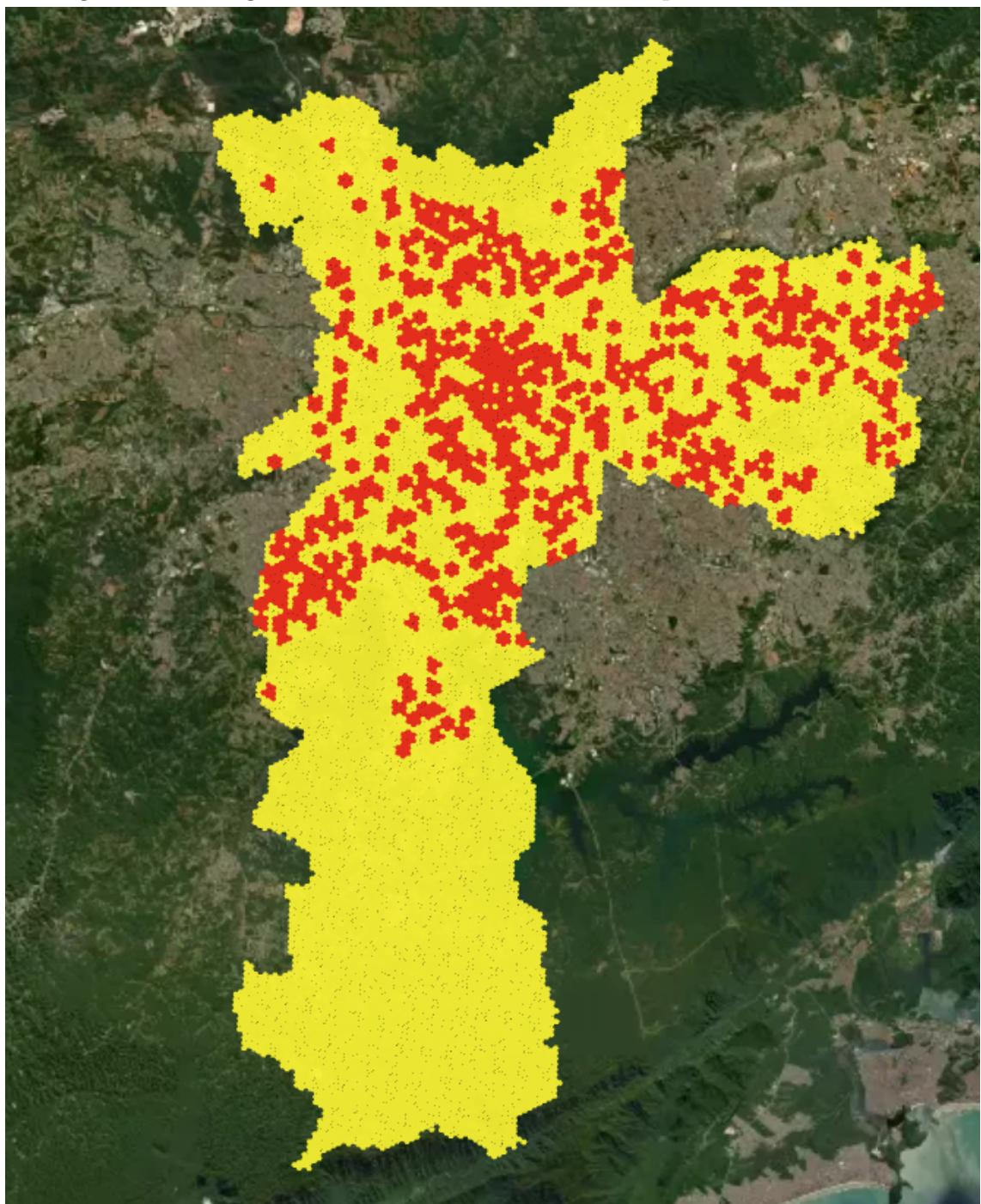
### 6.3.2 Exemplo de Aplicação do Algoritmo

O tempo esperado de execução do algoritmo excede aquele do *Greedy Adding*, mas sua complexidade é muito menor do que aquela encontrada na enumeração completa, de modo que podemos aplicá-lo para cidades maiores.

O algoritmo será testado para o município de São Paulo, para  $P = 450$ . Inicialmente, é realizada a etapa de adição (*Greedy Adding*), que pode ser visualizada na Figura 28 e resulta em uma cobertura de:

$$\frac{8.836.446,74}{15.872.783,82} = 55,67\%$$

Figura 28: Hexágonos Cobertos em São Paulo - SP para  $P = 150$  - 1<sup>a</sup> Fase

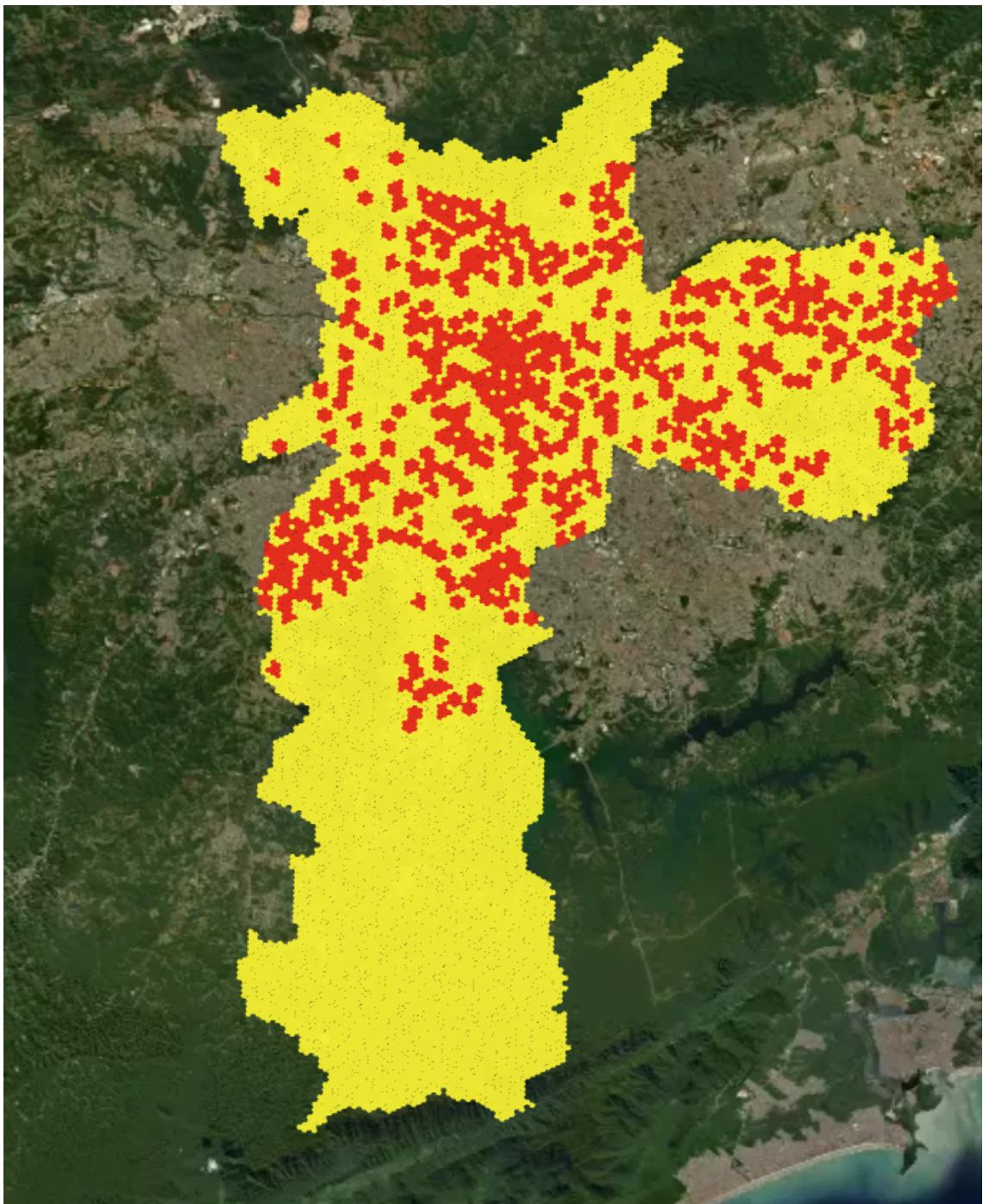


Fonte: Elaboração própria a partir do software Kepler

Em seguida, é aplicada a etapa de substituição, visualizável na Figura 29, e cuja cobertura é:

$$\frac{8.846.325,45}{15.872.783,82} = 55,73\%$$

Figura 29: Hexágonos Cobertos em São Paulo - SP para  $P = 150$  - 2<sup>a</sup> Fase



Fonte: Elaboração própria a partir do software Kepler

## 7 RESULTADOS

Este capítulo busca apresentar e analisar os resultados obtidos a partir da execução dos três algoritmos: Enumeração Completa, *Greedy Adding* (nos dois cenários em que se apresenta) e *Greedy Adding and Substitution*. Os resultados totais podem ser visualizados através do link [GitHub](#).

Para o 1º Cenário, foram executados 823 vezes o Algoritmo *Greedy Adding*, 628 dos quais também foram executados para o *Greedy Adding and Substitution* e 80 destes também sendo executados para a Enumeração Completa; Foram levantados a porcentagem de cobertura da cidade e o tempo gasto para cada execução.

Para o 2º Cenário, o Algoritmo *Greedy Adding* foi executado 440 vezes, 55 para cada uma das seguintes cidades: Belo Horizonte - MG, Brasília -DF, Curitiba - PR, Fortaleza - CE, Porto Alegre - RS, Rio Tinto - PB, Salvador - BA e São Paulo - SP. O parâmetro  $H$  percorreu 55 valores compreendidos entre 0,0001 e 1.

### 7.1 1º Cenário

#### 7.1.1 Comparação entre os Três Algoritmos

Para os 80 casos nos quais foi possível executar os três algoritmos, se notou a distribuição da soma dos tempos de execução conforme a Tabela 2. Pode se notar que, para a execução dos mesmos casos, a Enumeração Completa (EC) envolveu um dispêndio temporal correspondente a mais de 116 vezes o tempo gasto para o *Greedy Adding* (GA). Já o tempo do *Greedy Adding and Substitution* (GAS) foi cerca de 60,5% superior à alternativa mais rápida.

A economia de tempo a partir a do emprego dos algoritmos gulosos é acompanhada da perda da garantia da solução ótima. Para esses 80 casos, apenas em 7 deles a solução por Enumeração Completa ofereceu uma cobertura percentual superior a 0,01%, que as soluções provenientes dos algoritmos gulosos. Na maior diferença percentual, a solução

Tabela 2: Tempos Total de Execução dos Algoritmos

Algoritmos	Tempo de Execução
GA	16,00 minutos
GAS	25,70 minutos
EC	31,16 horas

por Enumeração Completa representou um ganho de 11,58% de cobertura (cidade de Macaubal - SP, para  $P = 2$ ). A Tabela 3 apresenta tais casos, mostrando, para cada cidade e escolha do número de estações (P), a porcentagem de pessoas cobertas para cada algoritmo.

Tabela 3: Cobertura das Soluções - Casos com Diferenças Superior a 0,01%

Cidade	P	GA	GAS	EC
MACAUBAL-SP	2	56.7071%	56.7071%	63.2748%
MACAUBAL-SP	3	56.7071%	56.7071%	63.2748%
MURIAÉ-MG	3	22.1463%	22.1463%	24.4724%
MURIAÉ-MG	4	24.7107%	24.7107%	27.0734%
PIÚMA-ES	7	51.7996%	51.7996%	52.7773%
BOITUVA-SP	8	40.3772%	40.3772%	40.4087%
BOITUVA-SP	7	40.1783%	40.1783%	40.2002%

Para os demais 73 casos, a diferença das soluções não ultrapassou 0,01%, o que denota uma alta adequação do emprego dos métodos heurísticos, dado o grande tempo economizado.

### 7.1.2 Comparação entre as Heurísticas

Esta seção busca a comparação dos desempenhos das heurísticas para os 628 casos nos quais os dois métodos foram empregados. Para 219 destes casos, a diferença das soluções ultrapassou 0,01%, sendo a máxima diferença encontrada para a cidade de Belo Horizonte e  $P = 310$ , mesmo assim num valor baixo de 1,51% de ganho de cobertura. O algoritmo GA precisou de 403,75 s (cerca de 6,7 minutos) para executar estes 628 casos, enquanto o algoritmo GAS levou 1290,42 s (cerca de 21,5 minutos). Essa execução pouco mais de 3 vezes mais longa pode ser aceitável dado o ganho de cobertura obtido, ou rejeitado, caso o pequeno acréscimo seja menos relevante que o tempo gasto.

A Tabela 4 mostra os casos nos quais a diferença das soluções ultrapassou 0,40%, ordenadas da maior para a menor diferença.

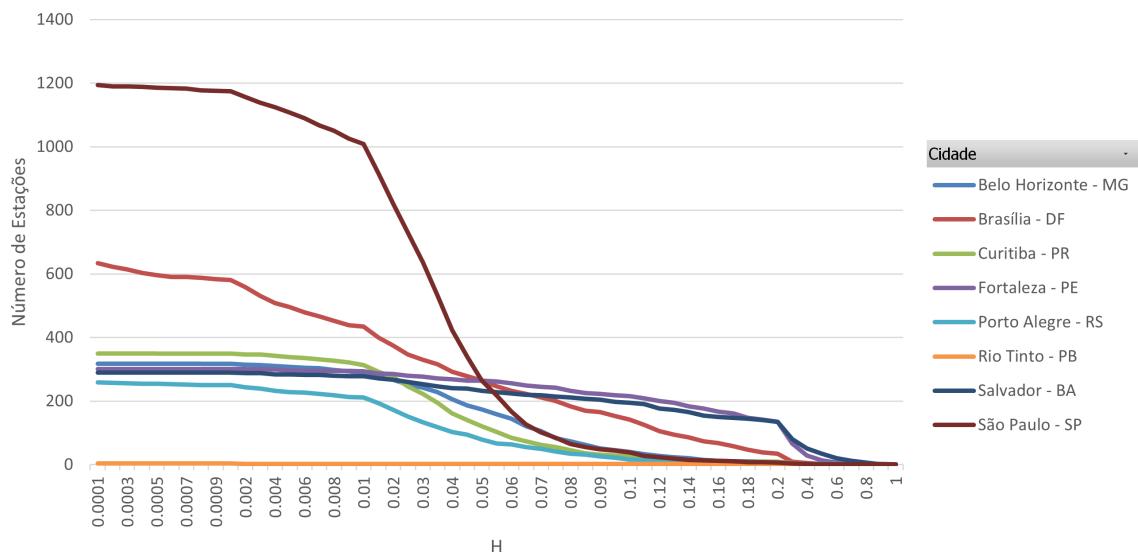
Tabela 4: Cobertura das Soluções Heurísticas - Casos com Diferenças Superior a 0,40%

Cidade	P	GA	GAS
BELO HORIZONTE-MG	310	79.2416%	80.4414%
BELO HORIZONTE-MG	300	79.0143%	79.9280%
BELO HORIZONTE-MG	290	78.6881%	79.5510%
RECIFE-PE	160	84.8595%	85.6567%
RECIFE-PE	150	84.0301%	84.7887%
RECIFE-PE	140	83.0127%	83.7148%
RECIFE-PE	130	81.5501%	82.2026%
RECIFE-PE	100	73.6532%	74.2329%
BELO HORIZONTE-MG	280	78.2571%	78.8520%
RECIFE-PE	110	76.7702%	77.3500%
RECIFE-PE	120	79.4117%	79.9982%
BELO HORIZONTE-MG	270	77.6356%	78.1906%
BELO HORIZONTE-MG	260	76.8582%	77.3361%
SÃO PAULO-SP	1000	81.4803%	81.9771%
SÃO PAULO-SP	990	81.2802%	81.7684%
BELO HORIZONTE-MG	250	75.9595%	76.4033%
SÃO PAULO-SP	980	81.0699%	81.5428%
SÃO PAULO-SP	940	80.1268%	80.5883%
SÃO PAULO-SP	950	80.3779%	80.8394%
SÃO PAULO-SP	960	80.6176%	81.0801%
SÃO PAULO-SP	970	80.8483%	81.3108%
SÃO PAULO-SP	930	79.8651%	80.3130%
SÃO PAULO-SP	910	79.3095%	79.7339%
SÃO PAULO-SP	920	79.5925%	80.0182%
SÃO PAULO-SP	840	77.1001%	77.4809%
SÃO PAULO-SP	830	76.7431%	77.1160%
SÃO PAULO-SP	850	77.4469%	77.8195%
SÃO PAULO-SP	860	77.7793%	78.1518%
SÃO PAULO-SP	900	79.0189%	79.3972%
SÃO PAULO-SP	870	78.1003%	78.4729%
SÃO PAULO-SP	880	78.4161%	78.7887%
SÃO PAULO-SP	890	78.7227%	79.0953%
SÃO PAULO-SP	790	75.1999%	75.5540%
SÃO PAULO-SP	800	75.6044%	75.9543%
SÃO PAULO-SP	820	76.3761%	76.7281%
SÃO PAULO-SP	810	75.9966%	76.3465%
SÃO PAULO-SP	750	73.4734%	73.7916%
SÃO PAULO-SP	760	73.9185%	74.2367%
SÃO PAULO-SP	770	74.3556%	74.6738%
SÃO PAULO-SP	780	74.7851%	75.1033%
SÃO PAULO-SP	740	73.0197%	73.3189%
BELO HORIZONTE-MG	240	74.8997%	75.2028%

## 7.2 2º Cenário

Conforme  $H$  aumenta, se aumenta a rigidez para se aceitar uma estação nova na solução final. A Figura 30 mostra como varia o número de estações finais selecionadas com o parâmetro, para cada uma das 8 cidades selecionadas.

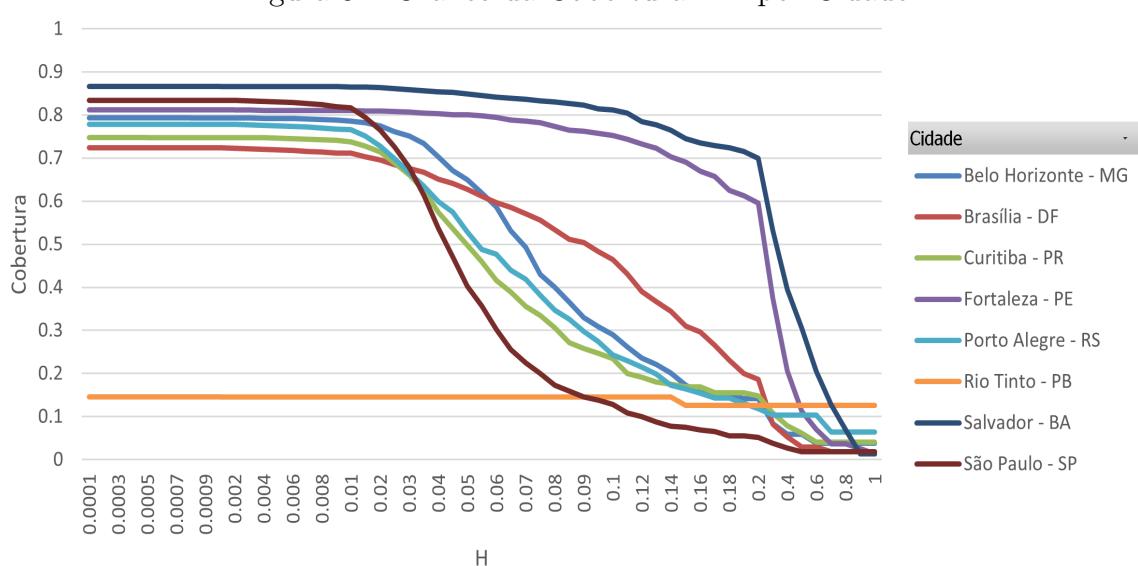
Figura 30: Gráfico do Número de Estações x  $H$  por Cidade



Fonte: Elaboração própria

O aumento do valor de  $H$  é acompanhado de uma diminuição do nível de cobertura, conforme pode ser visualizado na 31.

Figura 31: Gráfico da Cobertura x  $H$  por Cidade



Fonte: Elaboração própria

Direcionando a atenção para uma cidade específica, podemos visualizar como se comportam as duas variáveis, conforme se aumenta o parâmetro, mostrado na Tabela 5.

Tabela 5: Cobertura e Número de Estações x H para São Paulo - SP

Cidade	H	Cobertura	Número de Estações
São Paulo - SP	0.0001	0.834350863	1194
São Paulo - SP	0.0002	0.834340566	1190
São Paulo - SP	0.0003	0.834340566	1190
São Paulo - SP	0.0004	0.834328499	1188
São Paulo - SP	0.0005	0.834310447	1186
São Paulo - SP	0.0006	0.834300825	1185
São Paulo - SP	0.0007	0.834277022	1183
São Paulo - SP	0.0008	0.834194939	1177
São Paulo - SP	0.0009	0.834178735	1176
São Paulo - SP	0.001	0.834160526	1175
São Paulo - SP	0.002	0.833633818	1156
São Paulo - SP	0.003	0.832794014	1138
São Paulo - SP	0.004	0.83197495	1125
São Paulo - SP	0.005	0.830523055	1108
São Paulo - SP	0.006	0.828544712	1089
São Paulo - SP	0.007	0.825989103	1068
São Paulo - SP	0.008	0.823572379	1051
São Paulo - SP	0.009	0.819549395	1026
São Paulo - SP	0.01	0.816513764	1009
São Paulo - SP	0.015	0.794802786	916
São Paulo - SP	0.02	0.76413625	821
São Paulo - SP	0.025	0.725568745	730
São Paulo - SP	0.03	0.67766405	637
São Paulo - SP	0.035	0.613492668	532
São Paulo - SP	0.04	0.53673046	423
São Paulo - SP	0.045	0.470464502	340
São Paulo - SP	0.05	0.402923652	264
São Paulo - SP	0.055	0.356666731	217
São Paulo - SP	0.06	0.302808337	167
São Paulo - SP	0.065	0.256043894	127
São Paulo - SP	0.07	0.224350812	102
São Paulo - SP	0.075	0.199936917	84
São Paulo - SP	0.08	0.172506511	65
São Paulo - SP	0.085	0.158660955	56
São Paulo - SP	0.09	0.145626199	48
São Paulo - SP	0.095	0.13869576	44
São Paulo - SP	0.1	0.127627733	38
São Paulo - SP	0.11	0.107908561	28
São Paulo - SP	0.12	0.099236409	24
São Paulo - SP	0.13	0.08735682	19
São Paulo - SP	0.14	0.077249133	15
São Paulo - SP	0.15	0.0744689	14
São Paulo - SP	0.16	0.068749386	12
São Paulo - SP	0.17	0.065620646	11
São Paulo - SP	0.18	0.055785873	8
São Paulo - SP	0.19	0.055785873	8
São Paulo - SP	0.2	0.052084293	7
São Paulo - SP	0.3	0.038563094	4
São Paulo - SP	0.4	0.026654574	2
São Paulo - SP	0.5	0.018758019	1
São Paulo - SP	0.6	0.018758019	1
São Paulo - SP	0.7	0.018758019	1
São Paulo - SP	0.8	0.018758019	1
São Paulo - SP	0.9	0.018758019	1
São Paulo - SP	1	0.018758019	1

## 8 CONCLUSÃO

A escolha de estações para ingresso na rede de uma operadora de redes móveis é fundamental para a adequada cobertura dos usuários, através de gastos compatíveis com os necessários e se respeitando as limitações técnicas das redes de telecomunicação. O trabalho buscou levantar e comparar métodos de se chegar a tais escolhas, a partir das métricas de cobertura final da solução e tempo de execução gasto.

As alternativas ao método de enumeração completa, que garante a solução ótima, foram as técnicas heurísticas, que geram grandes economias de tempo à custa da perda da garantia de otimalidade. As aplicações destes em diversas cidades e para diferentes parâmetros mostrou uma adequação do emprego de tais métodos sub-ótimos, com a obtenção de resultados ótimos na vasta maioria dos casos e alguma perda em poucos deles. Além disso, se notou que o incremento do Algoritmo *Greedy Adding* para o *Greedy Adding and Substitution* pouco aumentou as coberturas resultantes, gerando um incremento de algumas vezes do tempo de execução, de modo que a escolha por uma ou outra alternativa deve depender da disponibilidade de tempo do caso específico.

Além disso, o emprego de dois cenários permitiu a disponibilização de parametrizações diferentes para a seleção de estações na rede. A inclusão do parâmetro de acréscimo populacional permitiu estabelecer uma rigidez na inclusão de estações na solução final, permitindo maior flexibilidade para o processo decisório - não é necessária a definição prévia do número de estações final na solução. Além disso, equivalentemente, a cobertura cresce a medida que se relaxa o parâmetro, permitindo a obtenção de vários cenários de cobertura e estações por cidade, conforme visto.

Trabalhos futuros sobre o tema podem incluir a avaliação da Relaxação Lagrangeana, da formulação de Programação Inteira de BERMAN; KRASS (2005). A abordagem de resolução via softwares de programação linear inteira foi mostrado na resolução dos exemplos de modelagem (Seção 3.3.3), através da bilbioteca *scipy.optimize* do *Python*; contudo, esta também poderia ser empregada para a resolução do problema-alvo deste trabalho.

## REFERÊNCIAS

- CADE. **CADE em Números**. 2022. Disponível em: <http://cadenumeros.cade.gov.br>.
- PAIVA, F. **Consolidação de ISPs: especialistas recomendam calma antes fechar negócio**. 2022. Disponível em: <https://www.mobiletme.com.br/noticias/07/01/2022/consolidacao-de-isps-especialistas-recomendam-calma-antes-fechar-negocio/>.
- TELECO. **Market Share das Operadoras de Celular no Brasil**. 2022. Disponível em: <https://www.teleco.com.br/mshare.asp>.
- ANATEL. **Quantitativo mensal de acessos de Serviço Móvel Pessoal**. 2022. Disponível em: <https://dados.gov.br/dataset/acessos-autorizadas-smp/resource/1af1563e-7a67-4b47-aea1-63b69b7c556a>.
- MIRAGAIA, M. **Rede 5G requer mais infraestrutura, mas traz maior eficiência**. 2021. Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/seminariosfolha/2021/11/rede-5g-requer-mais-infraestrutura-mas-traz-maior-eficiencia.shtml>.
- SOARES, G. **Por que há tantas queixas sobre celulares na América Latina?** 2022. Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/tec/2022/08/velocidade-do-5g-renova-expectativa-mas-tempo-de-resposta-ainda-e-de-4g.shtml>.
- SANTANA, I. **Leilão de 5G soma R\$ 47,2 bi e abre mercado para novas operadoras**. 2021. Disponível em: <https://valor.globo.com/empresas/noticia/2021/11/05/anlise-leilo-de-5g-soma-r-4679-bi-e-abre-mercado-para-novas-operadoras.ghml>.
- BBCBRASIL. **Por que há tantas queixas sobre celulares na América Latina?** 2013. Disponível em: [https://www.bbc.com/portuguese/noticias/2013/07/130708\\_celular\\_latam\\_mdb](https://www.bbc.com/portuguese/noticias/2013/07/130708_celular_latam_mdb).
- UNION'S, I. T. **Radio Regulations**. 2020. Disponível em: <http://handle.itu.int/11.1002/pub/814b0c44-en/>.
- DASKIN, M. **Network and Discrete Location: Models, Algorithms, and Applications**. Wiley, 1995. ISBN 9781118536964. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=L9I5n0Sym4cC>.
- SIPSER, M. **Introdução à Teoria da Computação: Tradução da 2ª edição norte-americana (trad. Ruy José Guerra Barreto de Queiroz)**. São Paulo: Thomson Learning, 2007. ISBN 85-221-0499-9.
- ZANAKIS, S. H. et al. Heuristic methods and applications: A categorized survey. **European Journal of Operational Research**, v. 43, n. 1, p. 88–110, 1989. ISSN 0377-2217. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377221789904128>.

- PEARL, J. **Heuristics: Intelligent Search Strategies for Computer Problem Solving**. USA: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1984. ISBN 0201055945.
- MURRAY, A. T. Maximal Coverage Location Problem. **International Regional Science Review**, v. 39, n. 1, p. 5–27, January 2016. Disponível em: <https://ideas.repec.org/a/sae/inrsre/v39y2016i1p5-27.html>.
- ARENALES, M. et al. **Pesquisa operacional**. Elsevier Brasil, 2006. ISBN 9788535251937. Disponível em: [https://books.google.com.br/books?id=sB\\\_\\\_Fi8rprEC](https://books.google.com.br/books?id=sB\_\_Fi8rprEC).
- FARAHANI, R. Z. et al. Covering problems in facility location: A review. **Computers Industrial Engineering**, v. 62, n. 1, p. 368–407, 2012. ISSN 0360-8352. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S036083521100249X>.
- BERMAN, O.; KRASS, D. An Improved IP Formulation for the Uncapacitated Facility Location Problem: Capitalizing on Objective Function Structure. **Annals of Operations Research**, v. 136, n. 1, p. 21–34, April 2005. Disponível em: <https://ideas.repec.org/a/spr/annopr/v136y2005i1p21-3410.1007-s10479-005-2036-2.html>.
- REVELLE, C. et al. Solving the maximal covering location problem with heuristic concentration. **Computers Operations Research**, v. 35, n. 2, p. 427–435, 2008. ISSN 0305-0548. Part Special Issue: Location Modeling Dedicated to the memory of Charles S. ReVelle. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054806000967>.
- BIANCHI, L. et al. A survey on metaheuristics for stochastic combinatorial optimization. **Nat. Comput.**, v. 8, n. 2, p. 239–287, 2009. Disponível em: <http://dblp.uni-trier.de/db/journals/nc/nc8.html#BianchiDGG09>.
- BRODSKY, I. **H3: Uber's Hexagonal Hierarchical Spatial Index**. 2018. Disponível em: <https://eng.uber.com/h3/>.
- H3GEO. **Table of Cell Areas for H3 Resolutions**. 2022. Disponível em: <https://h3geo.org/docs/core-library/restable/>.